普通高等教育“十五”国家级规划教材
数学教育系列教材
总主编：张奠宙　宋乃庆

中学几何研究

张奠宙　沈文选　主编

高等教育出版社

内容提要

本书是“数学教育系列教材”（普通高等教育“十五”国家级规划教材）之一，是关于中学几何内容及其教学理论与实践的概述，包括绪论、度量几何学、欧氏几何的公理化体系、平面几何证题方法、平面几何名题欣赏、中学几何教学的综述、立体几何研究与解题、解析几何研究与解题、球面几何学初步以及几何定理的机器证明等内容。

教材从内容上努力体现当代数学的核心观念，破除过度形式化的体系，返璞归真，平实近人；在叙述上紧密配合国家数学课程改革的需要，为一线教师的数学教学服务。

本书由来自全国多所高等师范院校的专家、学者共同完成，其读者对象是高等师范院校的数学系学生以及有志于从事数学教育的大学生，也十分适合作为中小学教师培训和继续教育用书。

图书在版编目（CIP）数据

中学几何研究/张奠宙，沈文选主编．—北京：高等教育出版社，2006.1

（数学教育系列教材/张奠宙，宋乃庆总主编）

普通高等教育“十五”国家级规划教材

ISBN 7-04-017762-5

Ⅰ．中… Ⅱ．①张…②沈… Ⅲ．①几何课－教学研究－师范大学－教材②几何课－教学研究－中学 Ⅳ．G633.632

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 148420 号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京印刷一厂	畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2006 年 1 月第 1 版
印　　张	16	印　　次	2006 年 1 月第 1 次印刷
字　　数	280 000	定　　价	18.70 元

物料号　17762-00

策划编辑　马　丽

责任编辑　张耀明

封面设计　于文燕

责任绘图　尹　莉

版式设计　范晓红

责任校对　王　雨

责任印制　陈伟光

“数学教育系列教材”编辑委员会名单

本书作者

张奠宙　沈文选　孙熙椿　吴仁芳　沈纯理

龙开奋　蒋　亮　邹一心　何维安　胡庆彪

参加编写审读的还有

宋乃庆　王林全　罗增儒　陈广文　沈文燕

张伟平　刘　丹　黄兴丰　董　超

前 言

本书是《数学教育丛书》中的一册。

当初定名为《中学几何研究》,是为了和《初等几何研究》相区别。实际上,现今中学几何中有度量几何,变换几何,几何基础,复数几何等等,甚至有拓扑学的内容。这些都或多或少地超出了17世纪之前的那种“初等几何”的范围。我们使用“中学几何”的名称,目的是希望能够与时俱进地反映21世纪几何教育发展的境况。

本书的体系是“几何研究”、“教学研究”、“解题研究”三者并重,尽量把三者糅合在一起。这就是说,本书要深入地解释中学几何的内容,要有高观点却不能脱离中学实际,尽可能回答教学中可能遇到的问题。同时,还要顾及如何进行教学,重要的案例和教学经验的叙述是不可少的。当然,也需要有一些解题的研究,因为几何不能离开题目和证明。

数学教育的核心,是呈现数学的教育形态,高效率地让学生理解数学的本质。因此,本书的重点,必须用较高的观点来考察“中学几何”内容,并适当地加以扩充。这里既有绪论中那样全方位地综述几何学的现代进步,包括第九章的球面几何和球面三角,更有第十章那样介绍中国数学家在机器证明上的最新贡献。这些固然超越了中学几何的内容,但是作为中学数学教师,这些修养是不可缺少的。

值得提出的是,在第二章和第三章我们系统地处理了“度量几何”和“公理化方法”。度量几何学,从长度的定义开始,到面积、体积、以至到可列可加测度,加上论述将几何学定量化的三角学,分形以及分数维数的计算,这是全新的几何处理。公理化方法,则分成了5个阶段,包括布尔巴基的结构主义阶段。这两章的基本内容,体现了现代数学思想和中学几何内容的整合,与过去的《初等几何》差异很大。

第四、第五两章是传统的平面几何名题欣赏和证题方法。我们在保持原有精华的基础上,有所精简,有所发展。第七、第八两章,围绕中学的立体几何和解析几何教学,进行了适当的扩展性讲述,希望能够直接对教学内容理解有所帮助。特别地,其中有“例题求解和点评”各一节,希望能够帮助读者复习中学有关

的几何解题训练要求，并通过点评有所提高。

第六章集中研究了几何教学改革。其中有国内外的历史经验，也反映了我国当前的几何学教学改革的争论。但是，我们在简单地阐述本书观点之外，也适当地保持了一定的距离。许多教育改革的是非，需要长时间的考验，不能急于下结论。同时，也希望使用本教材的老师和同学有自己的独立思考。

本书的写作，起自2002年重庆的“数学教育”国际会议。当时由张奠宙和宋乃庆拟订纲要，向全国招标。沈文选撰写了第3、4、5、7、8、9的初稿，孙熙椿撰写了第10章。宋乃庆、罗增儒、王林全和张奠宙在2004年审查了书稿，提出了修改的意见。根据原有的设计，张奠宙补写了第1,2,6各章。以后不断地请许多先生审稿、补充修改。先后部分参与的有沈纯理、吴仁芳、龙开奋等。蒋亮、胡庆彪老师提供了立体几何和解析几何的例题与解答，并有点评，最后经过邹一心、何维安的大幅度修改收入本书。先后参与本书审读的还有陈广文、沈文燕、张伟平、刘丹、董超、黄兴丰。2005年5月，沈文选复看了全书，加以整理。最后，由张奠宙做了删节、修改和润饰。稿子经过多人之手，编拢在一起，不免会有脱漏，这给责任编辑增添了许多麻烦，也会给读者带来一些不便，在此表示深切的歉意。

本书的编写是一次新的尝试。体系、材料、观点有许多是新的。新，未必一定好。但是，总要与时俱进，不能简单地重复过去。本书究竟是否站得住，还得由教学实践来检验。我们静候读者的批评指正。

张奠宙　宋乃庆　沈文选

2005年夏

目　　录

第一章　绪论:几何学——时间与空间的数学

“前不见古人,后不见来者,念天地之悠悠,独怆然而涕下.”这是唐朝陈子昂的诗句,抒发着诗人对时间和空间的万千感慨.

就感性认知而言,人只能认知有限的事物,从生到死的时间短,从他目力所及的领域,就是一个人的时间和空间感知范围.但是人还可以想像,用理性来认识世界,就会得到陈子昂那样的印象:时间无始无终,天地无边无沿.

第一节　几何学的进步概说

茫茫太空,遥遥未来,我们生活的宇宙空间究竟是什么样?这是一个永恒的科学主题.古往今来,不知有多少科学志士为此付出毕生精力,但是研究至今仍未完结.一部几何学发展史,可以说就是各种各样的描摹宇宙的数学框架.请看:

- 时间的几何模型是一维的直线.没有开端,也没有终结.时间和实数集构成一一对应.时间的连绵不断,正是实数连续性的直观背景.
- 现实空间的直观描述是三维的:上下、前后、左右.各向同性、无限广延,处处都有一样的密度.每一个维度相当于一条直线.两个维度构成一个平面.古希腊数学家研究点、线、面的关系,更建立起公理体系.世称“欧氏空间”,其上的几何学,即“欧氏几何学”.
- 一维几何是贫乏的.平面几何就相当复杂.除了直线,直方形和直方体,还有曲线,曲面,各种几何体.最简单的曲线是圆.最简单的几何体有柱体、锥体、台体和球体,他们的表面是最简单的曲面,包括柱面、锥面、球面.这种研究方法,常称为综合几何学的方法.
- 笛卡儿发明了坐标系,把欧氏空间的点变成有序的三元数组(x,y,z).曲线是用只有一个参数的方程表示.曲面则用含有两个参数的方程表示.用代数方法进行演算,使得几何学插上了翅膀.用综合方法研究的圆锥曲线,在代数上表示为二次曲线.解析几何学由此诞生.
- 欧氏几何中平行公理的研究,导致非欧几何学的产生.其实,现实世界并非只有一种几何——欧氏几何学.例如球面上的几何学(以大圆作“直线”看),就不满足欧氏平面几何的公理体系.19世纪发现的非欧几何学,打开了新的天地.

- 几何图形可以搬来搬去,不改变图形的面积、体积.中国有所谓“出入相补”原理,即基于此种想法.但是,相似变换,可以把图形放大缩小,面积体积随之而变化.把物体投影在墙上,形状有变化的成分、也有不变的成分.这种变和不变,成了几何学的研究对象.射影几何学成了一门学问.
- 射影几何把线段的长短以及角度的大小都改变了,但是还是有一些东西没有变:相交、共线、共点等等都是.深入的研究发现,射影变换不改变四点的“交比”.德国数学家 F·克莱因进一步得出结论:几何学原来是研究不同变换群下几何不变量的学科.这一被称为“爱尔兰根”纲领的数学成就,影响了整个几何学的发展方向.
- 欧氏几何学所使用的工具很简单,所以只能研究直线、平面、直方体的变化.由“直”向“曲”的进化,来自微积分的推动.高斯一般地研究曲面上的几何学,即经典的微分几何学.最简单的曲面是球面.地球相当于一个椭球面.地球上两点之间,以怎样的曲线为最短?这相当于问,从上海到洛杉矶,沿着怎样的路线走最短?这种“曲面上的最短线”称为测地线.球面上的测地线就是大圆.
- 微分几何学的一个根本问题是如何“度量”曲线的长短.曲线的弧长,当然得要用微积分方法进行计算.高斯给出了一系列的基本度量,其中最重要的是曲率.曲面上各处的弯曲程度是不一样的,不像欧氏几何到处都是一样的平直(曲率到处是零).
- 从平直的欧氏空间进到弯曲的一般空间,不仅仅是弯曲程度一个变化,更重要的是整体结构有改变.我们知道球面、环面具有很不相同的结构.可是,人们注意到,球面和环面,以及许多曲面,从局部看都差不多,环面上一点周围的一小片,和球面上一点周围的一小片,没有什么大的不同,都可以和欧氏平面上的一个小圆片一一对应起来.区别的关键在于整体.比如,球面不能和一块小圆片一一对应.必须把球面割成两片,每一片和小圆片一一对应.这种把曲面看成许多小块圆片堆积而成(堆成不同的结构)的观点,就是近代几何学家所说的流形.流形的整体结构就是拓扑学的研究对象.
- 20 世纪初,爱因斯坦创立“狭义相对论”.他把一维的时间和三维的欧氏空间放在一起考察.引起了物理学的革命.数学上的四维空间,成为现实的对象.1915 年,爱因斯坦又创立“广义相对论”,把宇宙看成是弯曲的四维空间.这样,微分几何学和高维几何学结合起来.宇宙空间原来也是一种流形.拓扑结构,流形上的距离,高维几何对象的描述方法,一下子提出了无数的几何学问题.几何学在 20 世纪下半叶,成为数学发展的主

流学科.直到今天,几何学仍然是当代数学的生长点.我们对时间和空间的认识还远远没有完结.

第二节 欧氏几何与非欧几何

灿烂的古希腊文明有许多伟大的成就.但是,影响最为深远的,可以说是数学.它的代表作品是公元前300年左右的欧几里得所写的《几何原本》.它的印刷数量仅次于"圣经".欧几里得几何学已经沿用了两千多年,至今中学教材中的几何学内容还与它基本一致.《几何原本》留给后人的巨大精神财富是它创立的公理化体系,一种理性思维的方法.以下是欧几里得先对一些基本概念(如点、直线、平面等)给出的定义:

(1) 点没有部分;

(2) 线有长度,但没有宽度;

(3) 线的界限是点(注:《几何原本》中没有伸展到无穷的线);

(4) 直线是同其中各点看齐的线;

(5) 面只有长度和宽度;

(6) 面的界限是线;

(7) 平面是与其上的直线看齐的那种面;

(12) 圆是包含在一条(曲)线里的那种平面图形,使得从其内部某一点连到该线的所有直线(线段)都彼此相等,并称圆内上述的那个点为圆的中心(简称圆心);

(23) 平行直线是在同一平面内,而且往两个方向无限延长后,在这两个方向上都不会相交的直线.

欧几里得总共引入了119个定义,给出了五个公理:

(1) 等于同量的量是相等的;

(2) 等量加等量还是等量;

(3) 等量减等量还是等量;

(4) 能重合的量是全等的;

(5) 整体大于部分.

接着,欧几里得再承认了五条公设:

(1) 从每个点到每个其他的点必定可以引直线;

(2) 每条直线都可以无限延长;

(3) 以任意点作中心,通过任何给定的另一点,可以作一圆;

(4) 所有直角都相等;

(5) 同平面内如有一条直线与另两条直线相交,且在前一条直线的某一侧

所交的两内角之和小于两直角,则后两条直线无限延长后必在这一侧相交.(注:在承认了公设(1)—(4)的前提下,可推出"过给定直线外的一点,至少存在一条直线与给定直线不相交.")

而第五公设的一种等价的陈述为"过给定直线外的一点,至多存在一条直线与给定直线不相交."

欧几里得在此基础上运用逻辑推断,导出了许许多多的命题(在《几何原本》中包含了465个命题),从而构成了欧几里得几何学.

通过这样的演绎方法获得的知识系统,显示了无可辩驳、绝对正确的真理价值,成为人类追求最高科学境界的典范.几何,于是越出数学的范围,浸润着每一块科学园地.

在漫长的中世纪,几何学在不断完善之中.人们想改善《几何原本》中的公理体系.特别是感到第五公设(即平行公理)也许是其他公理可以推出来的"定理".很多学者(包括一些非常有名的数学家)曾宣称已证明了平行公理能用其他公理推导出来,但最后发现这些论证都是不正确的.

罗巴切夫斯基在1829年宣布:用平行公理的反命题,即用"过给定直线外一点,存在着至少两条直线与给定直线不相交"来替代平行公理,并由这套新的体系演绎出一套与欧氏几何迥然不同的命题,但却并没有导致任何矛盾.这样的几何就是非欧几何.后来 Poincaré 提出了一个非欧几何的模型.将非欧几何学在人们已经习惯的欧氏空间中实现出来。自此,非欧几何就成了一种令人信服的、"真正"的几何学.

我们将在第三章进一步对此进行阐述。

第三节 欧氏空间和坐标几何

欧几里得的几何学是现实世界最简单最粗略的近似.他为牛顿的绝对时空准备了数学模型.在牛顿看来,空间像一个大容器,物体在其中运动、静止、放进或移出,空间并不会发生什么变化.另一方面,时间像一条川流不息的河流,无论事件发生或者不发生,时间总是均匀不变地流逝.因此,三维的欧氏几何学可以描述空间、一维的欧氏空间(数轴)可以描述时间,两者互不相干,这是人们最朴素的时空观,也是现今大多数人持有的时空观.在人们日常生活中,用这样的方法描述宇宙也就可以了.

笛卡儿为欧氏空间安上了坐标架,使数形结合起来诞生了解析几何学.用三维的空间解析几何来描述宇宙,增加了"数"的描摹手段,自然有更大的表现力.但是,这也给人们带来了新的问题.这就是,坐标原点如何选择?三根两两垂直

的坐标轴的指向如何确定？换句话说，由于宇宙本来没有坐标，坐标原点和坐标轴的架设完全是人为的，各人可以有各人的笛卡儿坐标系．但是空间中物体的形状、位置和运动是客观存在的，不依坐标系的选择不同而有所改变．例如，线段 AB 的长度，$\triangle ABC$ 的形状在各种坐标系下应该是一样的．所以说，在解析几何学中我们所研究的几何对象乃是那些与坐标系选择无关的量，即在坐标变换下的不变量．

坐标变换是数学家所熟悉的．三维欧氏空间中的两个坐标系 $O-xyz$ 和 $O_1-x_1y_1z_1$，如以 $O-xyz$ 为基准，点 O_1 在坐标系 $O-xyz$ 中坐标为 (d_1,d_2,d_3)，那么任何点 A 的两种坐标 (x,y,z) 和 (x_1,y_1,z_1) 之间满足关系

$$\begin{cases} x_1=a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z+d_1, \\ y_1=a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z+d_2, \\ z_1=a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z+d_3, \end{cases}$$

其中 (a_{ij}) 是正交酉矩阵．

如果 Oz 与 O_1z_1 平行，那么坐标变换公式为

$$\begin{cases} x_1=x\cos\theta+y\sin\theta+d_1, \\ y_1=-x\sin\theta+y\cos\theta+d_2, \\ z_1=z+d_3, \end{cases}$$

其中 θ 是 Ox 与 O_1x_1 的夹角．这是平面坐标系的平移与旋转．欧氏几何正是研究在上述变化下的不变性问题，如保持长度与角度不变，保持全等与相似不变，图形面积不变等等．高等代数告诉我们，全体正交酉变换构成群（欧氏变换群），欧氏几何正是研究这一群下的不变量的几何学．

第四节　微分几何与黎曼几何

大家知道笛卡儿在欧氏空间中引入了直角坐标系后，利用数形结合就形成了解析几何学．但是在解析几何学中一般只处理点、直线、平面、二次曲线、二次曲面等几何对象，这是因为将图形转化为数据以后，笛卡儿仅用初等代数学来处理这些数据．随着微积分的发展，分析学也进入了几何学，所以可以利用微积分来揭示出曲线、曲面在其一点附近的弯曲程度，这就形成了三维欧氏空间中曲线和曲面的微分几何学．Gauss 在这方面有着杰出的贡献．曲面论的主要想法是把用参数 (u,v) 表示的曲面上两个无限邻近点之间的距离 ds 表示成 $ds^2=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2$，其中 E,F,G 都是参数 u,v 的函数．我们称矩阵

$$\begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$$

为该曲面的度量矩阵,曲面上的许多弯曲的性质都可用度量矩阵刻画出来.

到了 1854 年,黎曼提出了现今人们称之为"黎曼几何学"的思想.在已采用了坐标系$\{x^1,x^2,\cdots,x^n\}$的 n 维空间中,他引入了无限邻近的两点$(x^1,x^2,\cdots,x^n)$和$(x^1+\mathrm{d}x^1,x^2+\mathrm{d}x^2,\cdots,x^n+\mathrm{d}x^n)$之间的"距离"$\mathrm{d}s$ 的概念,$\mathrm{d}s^2$ 可用 $\mathrm{d}x^1$,$\mathrm{d}x^2,\cdots,\mathrm{d}x^n$ 的一个正定二次型来表出:

$$\mathrm{d}s^2=\sum_{i,j=1}^{n}g_{ij}(x)\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j,$$

其中(g_{ij})是一个正定矩阵.

后来人们将这种带有度量 $\mathrm{d}s^2$ 的空间称为黎曼空间.欧氏几何是一种最简单的黎曼几何,这时的 $g_{ij}=\delta_{ij}$,即

$$\mathrm{d}s^2=(\mathrm{d}x^1)^2+(\mathrm{d}x^2)^2+\cdots+(\mathrm{d}x^n)^2.$$

利用度量 $\mathrm{d}s$,我们可以导出黎曼空间中曲线的弧长、区域的面积、向量的平行移动等几何概念,并由此发展成一种崭新的几何学.

后来 Minkowski,Lorentz 等人再将黎曼几何中度量正定性的限制去掉,即 $g_{ij}(x)$也可以不是正定的(但要求它是非退化的),这样就导出了 Lorentz 几何,这时

$$\mathrm{d}s^2=\sum_{i,j=1}^{n}g_{ij}(x)\mathrm{d}x^i\mathrm{d}x^j,$$

其中矩阵(g_{ij})是一个非正定的,但行列式不等于 0 的矩阵.特别地,当

$$(g_{ij})=\begin{bmatrix}+1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & -1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & -1\end{bmatrix}$$

时,称这种 Lorentz 空间为 Minkowski 空间.

第五节 四维时空、Einstein 狭义相对论、广义相对论

直至 19 世纪末,黎曼几何学或 Lorentz 几何学仍停留在纯理论的发展阶段.但到了 20 世纪初,局面有了明显的变化.大家知道,数学是一门研究现实世界中的数量关系和空间形式的科学.长时期以来,人们习惯地认为欧几里得空间是现实空间的一种最好的描述.牛顿就采用欧几里得空间来描述物体所在的空间.在牛顿力学中,时间是绝对的,时间和空间是两种类型截然不同的参量.如果在三维欧氏空间中选用笛卡儿直角坐标系$\{O;x,y,z\}$,则物体在时刻 t 的空间位置可用(t,x,y,z)来表示.如果将坐标系$\{O;x,y,z\}$沿 x 轴按常速 a 作平移运

动(无转动)，则运动坐标系$\{O';x',y',z'\}$与静止坐标系$\{O;x,y,z\}$之间的变换关系为

$$\begin{cases} x'=x-at, \\ y'=y, \\ z'=z. \end{cases}$$

于是同一质点在这两个不同坐标系中所观察到的速度是不同的，质点在静止坐标系$\{O;x,y,z\}$中的速度向量$\vec{v}=(v_x,v_y,v_z)$与在运动坐标系$\{O';x',y',z'\}$中的速度向量$\vec{v'}=(v'_{x'},v'_{y'},v'_{z'})$之间有下面的关系：

$$\begin{cases} v'_{x'}=\dfrac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-a=v_x-a, \\ v'_{y'}=\dfrac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=v_y, \\ v'_{z'}=\dfrac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=v_z. \end{cases}$$

但是从 19 世纪末所发现的著名的 Michelson 实验(1881)中知道，在这两个不同的惯性系下所测到的光速(即光子的速度)却总是相同的. 这一个现象是很难用牛顿力学的理论去解释的. 1905 年 Einstein 提出了狭义相对论，他认为时间和空间应该融合在一起，成为四维时空. 而称(t,x,y,z)为四维时空中的一个事件. Einstein 认为这个四维时空的几何学应该是 Minkowki 几何学，即两个无限邻近的事件(t,x,y,z)和$(t+\mathrm{d}t,x+\mathrm{d}x,y+\mathrm{d}y,z+\mathrm{d}z)$之间的"距离"(物理中称为"时空间隔")$\mathrm{d}s$应满足

$$\mathrm{d}s^2=c^2\mathrm{d}t^2-\mathrm{d}x^2-\mathrm{d}y^2-\mathrm{d}z^2,$$

而两个惯性系之间的坐标变换应使无限邻近的两个事件之间的"时空间隔"保持不变. 于是 Einstein 推算出在 Minkowski 时空中，上述两个惯性系之间的坐标变换应该是

$$\begin{cases} x'=\dfrac{x-at}{\sqrt{1-\left(\dfrac{a}{c}\right)^2}}, \\ y'=y, \\ z'=z, \\ t'=\dfrac{t-axc^2}{\sqrt{1-\left(\dfrac{a}{c}\right)^2}}. \end{cases}$$

称这种变换为 Lorentz 变换. 利用 Lorentz 变换,质点在坐标系$\{O;x,y,z\}$中的速度向量$(v_x,v_y,v_z)=\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)$与在坐标系$\{O';x',y',z'\}$中的速度向量

$$(v'_{x'},v'_{y'},v'_{z'})=\left(\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'},\frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'},\frac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t'}\right)$$

之间应有下述关系:

$$\begin{cases} v'_{x'}=\dfrac{v_x-a}{1-v_x\dfrac{a}{c^2}}, \\ v'_{y'}=\dfrac{v_y\sqrt{1-\dfrac{a^2}{c^2}}}{1-v_x\dfrac{a}{c^2}}, \\ v'_{z'}=\dfrac{v_z\sqrt{1-\dfrac{a^2}{c^2}}}{1-v_x\dfrac{a}{c^2}}, \end{cases}$$

即它是使 Minkowski 几何学中的度量

$$\mathrm{d}s^2=c^2\mathrm{d}t^2-\mathrm{d}x^2-\mathrm{d}y^2-\mathrm{d}z^2$$

保持不变的一种变换,即使得

$$c^2\mathrm{d}t'^2-\mathrm{d}x'^2-\mathrm{d}y'^2-\mathrm{d}z'^2=c^2\mathrm{d}t^2-\mathrm{d}x^2-\mathrm{d}y^2-\mathrm{d}z^2.$$

特别地,如光子沿 x 轴以光速 c 运行,即

$$v_x=c,\quad v_y=0,\quad v_z=0,$$

则由 Lorentz 变换所导出的速度变换公式得知,光子在惯性系$\{O';x',y',z'\}$下的速度为

$$\begin{cases} v'_{x'}=\dfrac{c-a}{1-\dfrac{a}{c}}=c, \\ v'_{y'}=0, \\ v'_{z'}=0. \end{cases}$$

这样,Einstein 就圆满地解释了光速不变性. 在此基础上,Einstein 得出了著名的质能公式 $E=mc^2$.

随着狭义相对论的巨大成功,Einstein 在 1915 年又提出了著名的广义相对论,用来解释引力的由来. 他认为由于物质分布的存在,使得四维时空产生了弯曲,即这时的四维时空的几何学应该是 Lorentz 几何学,而光线运行的空间轨迹

是由四维时空的 Lorentz 几何中的测地线（即短程线）对其三维空间部分的投影所确定的，而表征物质分布的能量动量张量 T_{ij} 与表征四维 Lorentz 时空弯曲程度的度量 g_{ij} 之间要满足著名的 Einstein 场方程：

$$R_{ij} - \frac{R}{2} g_{ij} = T_{ij},$$

其中 R_{ij} 是由度量 g_{ij} 所确定的 Ricci 张量，R 是由 g_{ij} 所确定的数量曲率.

Einstein 场方程是一个关于度量 g_{ij} 的偏微分方程组. 根据 Einstein 场方程的一个特解——Schwarz Schield 真空解，Einstein 提出了广义相对论的三大实验验证：水星近日点的进动，光线的重力偏转，引力红移，从而确立了广义相对论的正确性. Einstein 广义相对论的成功极大地推动了黎曼几何学在 20 世纪的飞速发展.

第二章　度量几何学

最早的几何学从度量开始.通常说,尼罗河泛滥产生了几何学.中国古代的数学也是从几何度量开始的.《九章算术》的第一章就是“方田”,内容是土地面积的测量.此外,埃及、巴比伦和中国都先后发现了有关直角三角形三边之长平方关系的定理(我国称之为勾股定理).这是度量几何的光辉成就.

古希腊将度量几何学推向了巅峰.其中包括线段的长度及其比例关系,图形的面积,相似图形的面积之比,通过线段的可公度与否的研究,发现无理数,圆的面积导致 π 的计算.源于度量的几何学,形成了一个个美丽的数学山峰.

这一章,我们将用现代数学的观点审视几何的度量问题.主要涉及:不可公度思想与无理数以及弧度,微积分方法与曲边梯形面积,从有限可加的长度到可列可加的测度.

第一节　线段和圆弧的长度

度量几何的出发点是直线段的度量.各种文明社会都有自己的度量衡制度.其中的“度”即指“长度”.它告诉人们什么是长度为 1 的线段,即单位长度,也称为尺度.

长度的本质是给直线上的某些几何对象 E 以某种度量,即赋予某一个非负的实数 $l(E)$.这些对象 E 称为 l 可测.任何长度都需要满足以下的性质:

1. 长度是非负的数.单位线段$[0,1]$的长度是 1.一般地,$[a,b]$的长度是 $b-a$.

2. 长度是运动不变的.即一个物体的长度无论放在什么地方(经过平移、旋转、反射变换的移动)长度都是一样的.

3. 长度具有有限可加性.即两两不相交的线段之并的长度,等于各个线段长度之和.

这三条可以看成长度公理.

尺规作图可以不用长度的数值,但是要用到长度公理的 2 和 3.例如,将已知线段搬到另一位置,在某直线上截取与已知线段等长的线段,就会用到运动不变性.连续截取几个线段(彼此不相交),其总长度为各个线段之和.

线段的和与差,其结果是长度的和与差,这是显然的事.线段运算的下一个难题是等分.任何线段可以用尺规作图的方法,分成若干等份.特别地,单位线段

可以分成 10 等份. 每一等份的长度是 1/10. 这样，我们可以衡量出某些长度为有理数的线段. 这些想法可以说十分简单，任何人都容易想到.

接着，便是古希腊一项惊人的发现：不可公度量的存在，即出现无理数. 至于他们如何得到这一结论，已经无法确切地知道. 一般的推测如下（梁宗巨. 世界数学通史. 沈阳：辽宁教育出版社，2001：241—242）：

（1）用辗转相截的方法求正方形的边与对角线的公度，发现公度根本不存在.

如图 2-1，BC 是正方形的一边，AC 是对角线，现求两者的公度. 先在 AC 上截取 $DC=BC$，作 $DE\perp AC$，交 AB 于 E，易知 $AD=DE=EB$. AC 截去 DC 后剩下的一段 $AD<AE<AB=BC$. 下一步应该在 BC 上截取等于 AD 的线段，但 $AB=BC$，故也可以在 AB 上截取. 截取 $EB=AD$ 之后，剩下的 AE，正好是以 AD 为边的正方形的对角线. 于是情况又和开始时一样，以下的步骤只是重复上述的手续，这种重复永远不会完结. 因此不可能存在公度. 即 AC 与 AB 不可通约.

（2）用同样的方法求正五边形的一边与对角线的公度，或者将一个线段分为中末比之后，求大、小两部分线段的公度，最后证明公度不存在.

正五边形的五条对角线构成一个五角星形，它的中心形成一个小正五边形（图 2-2）. 容易证明 $AB=AD=EC$，$AE=DC=FG$. 现在求一边 AB 与对角线 AC 的公度. 先在 AC 上截取 $AD=AB$，剩下一小段 $DC<EC=AB$，下一步应该用 DC 或 AE 去截 AD，AD 截去 AE 后剩下的 ED 是小正五边形的一边，而 $FG=AE$ 是对角线. 接着应该是用 ED 去截 AE 或 FG. 于是又重复上述求正五边形的一边与对角线的公度的手续. 而且永远这样重复下去，所以不存在公度.

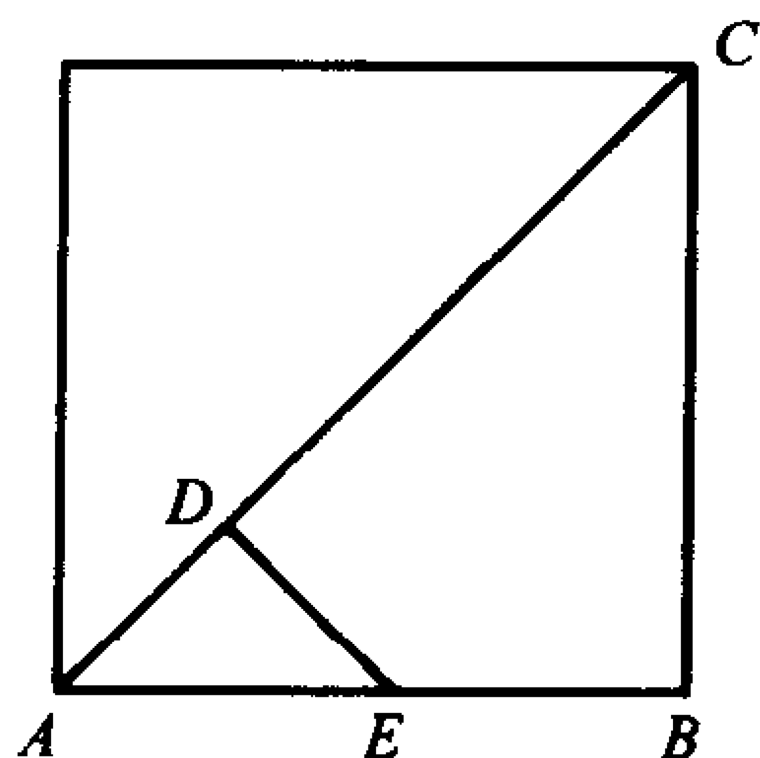


图 2-1

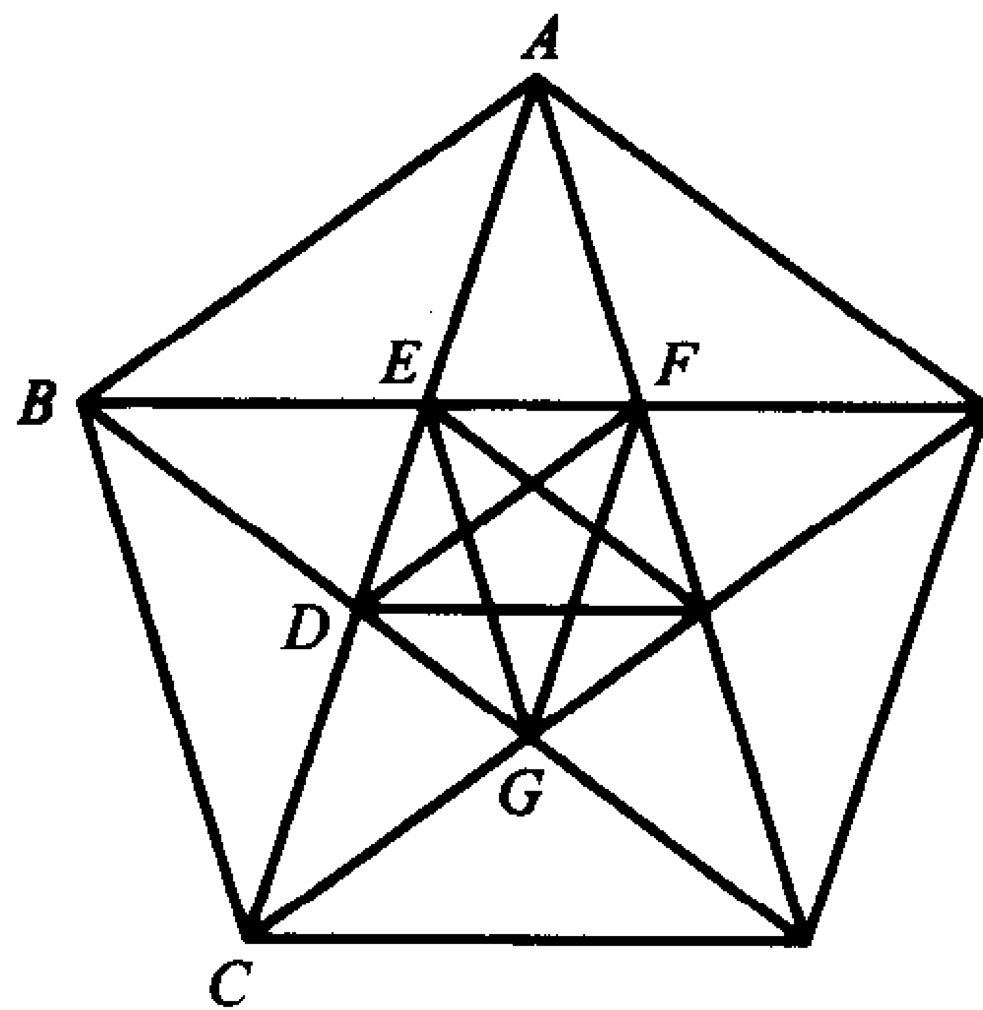


图 2-2

由上可见，线段的长度是和数的发展联系在一起的，无理数则完全由几何学研究而催生.

除了不可公度线段的研究之外，圆周长的度量也导致无理数 π 的诞生. 圆周长计算的另一个重大作用是产生了角度的弧度制. 我们把一个单位圆的圆心角，

用它相对的圆弧的长度来表示．这样，就将线段长度和角的度量统一起来了．

现在，我们的问题是，为什么非要实行弧度制．用 360 度的角度制有什么不便呢？事实上，在中学阶段处理 $\sin x, \cos x, \tan x$ 等三角比和三角函数的数值，作恒等变换，用余弦定理等等，用不用弧度制都关系不大．最重要的用处是在微积分教学中，那里有一个根本的性质：

$$当\ x \to 0\ 的时候，\lim \sin x / x = 1.$$

这里必须用弧度．原因是角 x 的大小度量和函数值 $\sin x$ 的大小出现在同一个式子里，它们必须有相同度量单位．

微积分中三角函数的导数公式，都是从这一性质推演出来的．由于高中的基础教育，要为大学打好基础．所以高中阶段要把弧度制介绍一下，熟练地用 $\pi/2$，2π 等符号表示角的大小．

曲线的长度，用初等方法难以处理．例如，必须用微积分方法才可以求椭圆的弧长，是一个定积分，而且是积不出的（即不能用初等函数加以表示）．

第二节 面积和体积

有了线段的长度之后，就可以求某些平面图形的面积和立体图形的体积了．以下是我们求平面图形面积的步骤．

一、多边形的面积（出入相补）

对于用直线段构成的图形，我们很容易得到它们的面积．

1．因为有线段长度，我们可以定义边长为 a 的正方形的面积为 a^2．

2．有了正方形的面积，我们可以设法把矩形分割为正方形，然后再加起来．这在矩形的两个边长都是有理数的时候，很容易做到．如果是无理数，则还得用有理数边长的矩形的面积来逼近，相当麻烦．因此，也可以把两步并为一步，直接规定矩形的面积是长乘宽．正方形的面积仍然是边长的平方．

3．三角形的面积是底乘高的一半．这可由割补方法得到，即将任意的三角形补充两个直角三角形可以构成矩形（图 2-3），于是三角形的面积是矩形的一半．

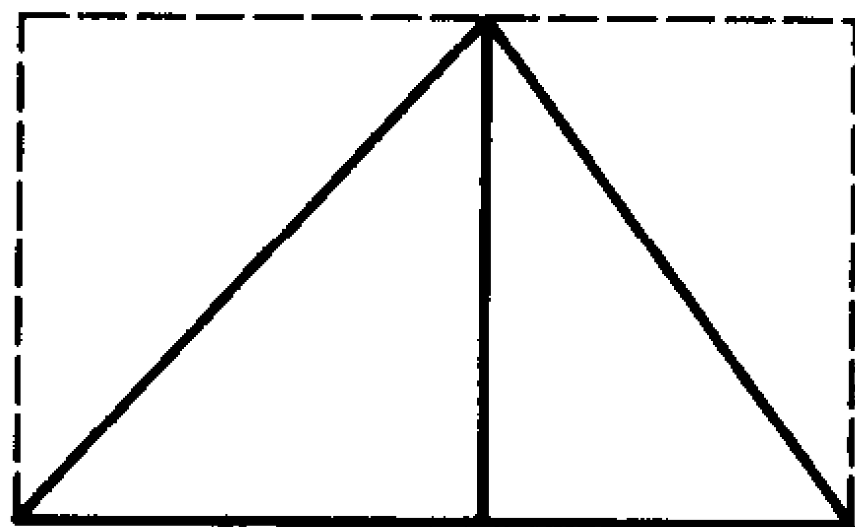


图 2-3

4．多边形可以分割为一些矩形和三角形，其面积自然是这些矩形和三角形面积之和．特别地，可以很容易获得平行四边形、等腰梯形等特殊多边形的面积．

以上四步，处理了直线形的面积问题．主要方

法是割补. 中国古代数学称之为"出入相补"方法.

二、曲边梯形的面积(内填外包极限法)

古希腊数学家曾经企图用这样的割补方法获得其他图形的面积,但是没有获得成功. 著名的三大尺规作图问题之一的化圆为方问题,如果成功,岂不是就能用正方形面积求得圆面积了吗? 由于 π 是超越数,用直尺圆规不可能作出超越数的长度来.

于是,寻求像圆面积这样的问题,必须采用新的思路. 公元前 400 多年,古希腊的安提丰提出计算圆面积的"穷竭法",即用正方形、正 8 边形,正 16 边形等等去内接填补,一直下去,"穷竭"之后,就可以从这些正多边形的面积得到圆的面积. 我国的刘徽在公元 263 年提出"割圆法",虽然晚了很多年,但是精神是一样的. 它从正 6 边形开始,每次将边数加倍,边数越多,多边形面积就和圆面积越发接近. "割之弥细,所失弥少,割之又割,乃至不可割,则与圆周合体而无所失矣!"

这里所用的数学思想是:内填多边形,再取极限. 大数学家阿基米德(公元前 287—前 212)用这种方法证明了:"抛物线弓形面积是同底等高的三角形的 4/3" 如图 2 - 4 抛物线弓形 P_1VP_2 是内接的三角形 P_1VP_2 面积 Δ 的 4/3. 不断增加如图中的三角形 P_1Q_1V, VQ_2P_2 等,将得到面积数

$$(4/3)\Delta-(1/3)(1/4^{n-1})\Delta.$$

当 $n\to\infty$ 时,就得到了所要求的结果.

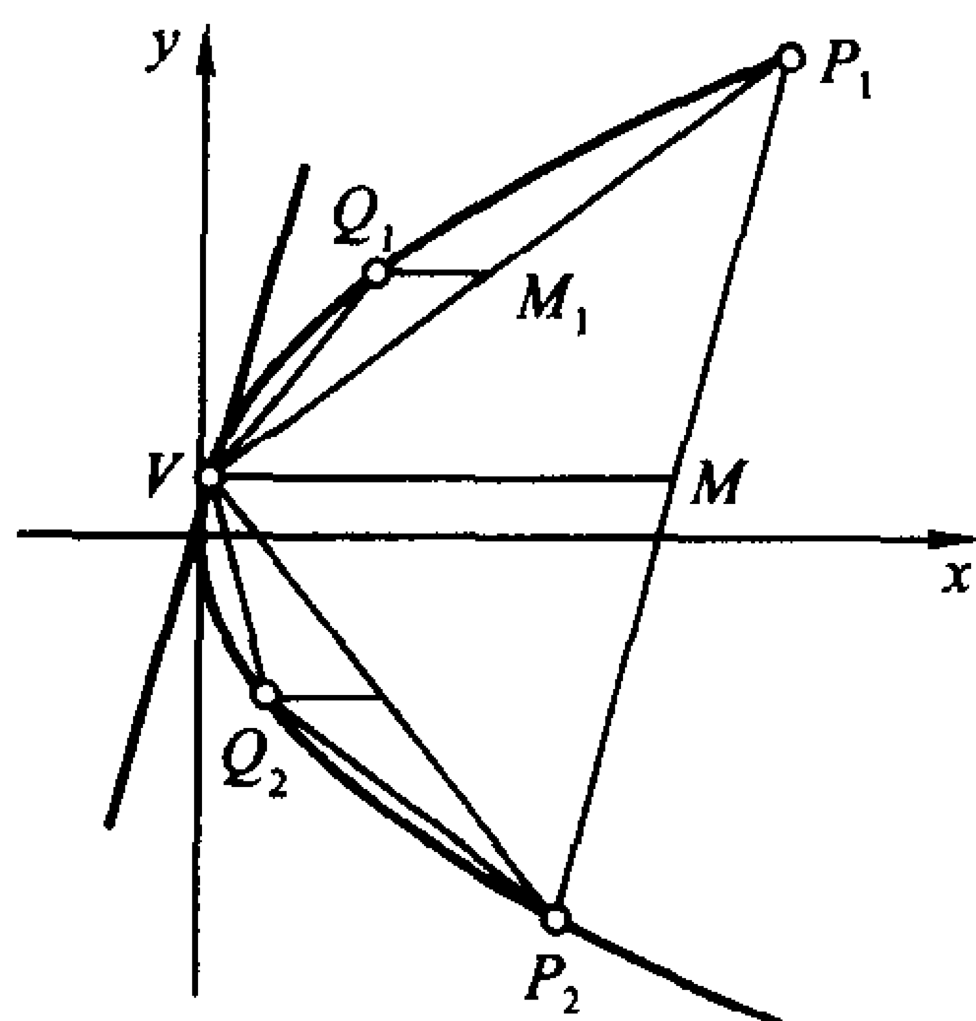


图 2 - 4

阿基米德的这一成就,是后来积分学产生的先导. 微积分学中用定积分求曲边梯形面积,正是用分割得来的内填矩形和外包矩形的面积加以近似,当分割越来越细时,这些矩形面积总和的极限就得到了.

这样我们在求平面图形面积的道路上,前进了一大步. 我们知道,椭圆的面积是 πab,其中 a,b 分别是椭圆的长短半轴.

对于多边形来说,用割补法直接求得的面积和用内填外包取极限得来的面积是一样的.

第三节 球的体积和表面积

我们经常接触的空间几何体,如棱柱、棱台、圆锥、圆柱等,其体积和表面积

都比较容易用初等方法求得.这是因为圆锥和圆柱的表面都可以展开为平面图形(可展曲面),而球面不是可展的,所以求球的面积比较困难.

如果运用微积分学中的重积分,我们可以很容易地获得球的体积公式

$$V=(4/3)\pi R^3.$$

球的体积可以用矩形为底的正棱柱体之并来逼近,也可以采用旋转体的方法获得.

运用祖暅原理,也可以用初等方法,从内接圆柱体的体积推出球的体积公式.

为求半径为 R 的球的体积,可以先研究半径为 R 的半球即可,为应用祖暅定理,需要构造一个易求体积的几何体,使它和半球可夹在两个平行平面之间,且当平行于这两平面的任一平面去截它们时,截得的截面积总相等.

为此,我们取一个底面半径和高等于 R 的圆柱,从圆柱中挖去一个以圆柱的上底面为底面,下底面圆心为顶点的圆锥,把所得的几何体和半球放在同一平面 α 上(图 2-5),因为圆柱的高为 R,所以这两个几何体可夹于两个平行平面之间.

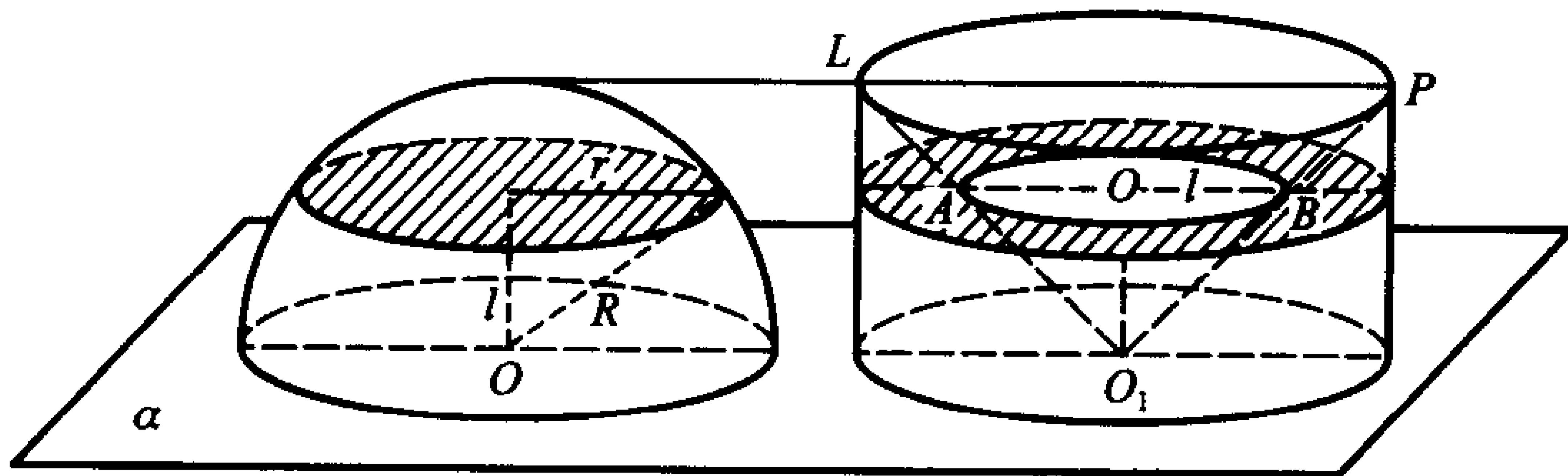


图 2-5

用平行于平面 α 的任一个平面去截这两个几何体,截面分别是圆面和圆环面.如果截面与平面 α 相距为 l,那么截面圆半径 $r=\sqrt{R^2-l^2}$,圆环面的大圆半径为 R,小圆半径为 l(因为 $\triangle O'O_1B$ 为等腰三角形).因此

$$S_{截面圆}=\pi r^2=\pi(R^2-l^2),$$

$$S_{圆环面面积}=\pi R^2-\pi l^2=\pi(R^2-l^2),$$

所以

$$S_{截面圆}=S_{圆环面}.$$

根据祖暅定理,这两个几何体体积相等,即

$$\frac{1}{2}V_{球}=\pi R^2\cdot R-\frac{1}{3}\pi R^2\cdot R=\frac{2}{3}\pi R^3,$$

所以

$$V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3.$$

球的体积也可用极限来求.

至于球的表面积公式：$S=4\pi R^2$，不容易用初等方法直接求得，但用微积分方法却非常简单. 这里要指出的是，如果用球的体积公式，则容易导出球的表面积公式. 事实上，球的体积可以看成许多底面为球面一部分的棱锥的并，它们以球心为顶点，各个棱锥底面之并是球面. 当棱锥分得很细时，棱锥的底面可以看作是平面. 由于棱锥的体积是底乘高的三分之一. 所以用极限的观点，可以认为球的体积是球的半径和球面乘积的三分之一. 于是，我们有：

$$(1/3)RS=(4/3)\pi R^3,$$

简化即得

$$S=4\pi R^2.$$

这里，我们再引用大数学家阿基米德在《方法》一书中的原始猜想，看看古人是怎样想的：

“一个球的体积是以它的大圆为底，以它的半径为高的圆锥体积的四倍. 由此定理使我想到：一个球面的面积是它的大圆面积的 4 倍. 这是因为，鉴于一个圆的面积等于一个高为半径、底边等于圆周的三角形的面积，可以类似地知道，一个球的体积等于某个圆锥的体积，其底面等于球面，高等于球的半径.”

第四节　从长度到测度

长度，面积，体积，是我们耳熟能详的名词，也是时常使用的概念. 从幼时开始，我们就有面积大小，体积大小的思考. 进入学校，就学习各种求面积和体积的方法. 但是，我们从来没有给面积和体积下过定义.

那么，什么是面积（体积）的定义呢？

在第一节中，我们给出了长度公理. 其实，它也可以扩充为面积、体积的公理.

定义 1　如果对于平面（空间）上的一族集合$\{E\}$，族中的每一个集合 E，都对应一个实数 $m(E)$，且满足以下的性质：

1. （非负性）$m(E)\geqslant 0$；

2. （运动不变性）如果集合 E 经过刚体运动变为集合 E'，则 $m(E)=m(E')$；

3. （有限可加性）若 $E_1,E_2,\cdots,E_n$ 是$\{E\}$中两两不相交的集合，那么 $m\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right)=\sum_{i=1}^{n} m(E_i)$；

4. （正则性）若 Q 是长、宽分别为 a,b 的矩形，则 $m(Q)=ab$（立方体情形为 $m(Q)=abc$）.

则称集合函数 m 为定义在集合族$\{E\}$上的面积（体积）.

我们通常所说的面积和体积显然都满足上述定义.只是在不同阶段,集合族的范围不同.以平面上的面积为例,有面积的范围从矩形到三角形,多边形,然后用微积分方法扩充到某些曲边梯形.这样的不断扩充,仍然保持以上的四条性质不变.

那么,用黎曼意义下的定积分方法,求出的"有面积图形"的范围是否足够大?看来还不够.这就是测度问题.我们如果将上述二维(三维)集合的面积(体积)公理中的第三条有限可加性,扩展为可列可加性,那就成为二维(三维)的测度公理了.

定义 2(勒贝格测度公理) 如果对于平面(空间)上的一族集合$\{E\}$(对可列并运算及差运算封闭),使得族中的每一个集合E,都对应一个实数$m(E)$,且满足以下的性质:

1. (非负性)$m(E)\geqslant 0$;

2. (运动不变性)如果集合E经过刚体运动变为集合E',则$m(E)=m(E')$;

3. (可列可加性)若$E_1,E_2,\cdots,E_n,\cdots$是$\{E\}$中两两不相交的集合,那么$m\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty} m(E_i)$;

4. (正则性)若Q是长、宽分别为a,b的矩形,则$m(Q)=ab$(立方体情形为$m(Q)=abc$).

那么,我们称m是定义在二维(三维)欧氏空间上的勒贝格测度.$\{E\}$中的集合称为可测集.

对于一维情形,上述勒贝格测度概念就是长度概念的扩充.

由于满足可列可加性,m可测集合的范围就扩大了.为了简单起见,我们只讨论一维的情况.

长度和测度的区别在于从有限可加性扩展到可列可加性.有测度的集合也大大扩充了.它不再限于线段及其有限并.它由可列可加性可以得出许许多多有测度的点集.例如$[0,1]$中的有理数集R和无理数集S,都有测度.

$$m(R)=\sum_{i=1}^{\infty} m(r_i)=\sum_{i=1}^{\infty} 0=0.$$

$[0,1]$中有理数全体是可列的,故可写为$r_1,r_2,\cdots,r_i,\cdots$.另一方面,$1=m([0,1])=m(R\cup S)=m(R)+m(S)=m(S)$.

长度和测度的区别也可以从内填外包的角度进行分析.一个集合的长度正是内填不相交的有限个区间的长度之和的上确界,也是用有限个包住该集区间的长度之和的下确界.而一个集合的测度则是将上列叙述中的"有限"改为"可

列”，内填可列个区间的长度的上确界称为内测度，外包可列个区间的长度的下确界称为外测度，内外测度相等称为该集的测度.

$[0,1]$中有理数集 R 的长度是等于零的，因为 R 中填不进任何区间，故若有长度，其长度应该是 0，但要外包 R 的区间至少应该是$[0,1]$，其长度又该是 1，这就会引起矛盾.

但是 R 却可以有测度. R 中填不进任何区间，故其内测度应该是 0. R 可以写成 $r_1, r_2, \cdots r_n, \cdots$. 今任给 $\varepsilon>0$，对每个 r_n 用长度为$\frac{\varepsilon}{2^n}$的区间 I_n 盖住，则

$$R \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n ,$$

而

$$\sum_{n=1}^{\infty} m(I_n) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \varepsilon,$$

故外测度比任何正数 ε 都小，因而也只能是 0，所以 R 是有测度的，其测度为 0.

在实变函数论中，对测度作了详细的研究. 用内填闭集、外包开集的内填外包法可以展开测度论（那汤松的《实变函数论》），也可以用测度扩张的卡拉泰奥多里的方法从区间的长度过渡到可测集的测度（江泽坚的《实变函数论》），这里就不赘述了.

那么是否能做到使每个集合都有测度呢？实变函数告诉我们，对可列可加测度来说，总存在着不可测集，即不可能每个集都可测. 但 Banach 证明了一个定理：如果限于一维和二维空间，放弃可列可加性，只要求有限可加性，那么有办法做到每个集合都有“长度”. 但当 $n\geqslant 3$ 时，$\mathbf{R}^n$ 中任何有限可加的长度也不能扩展到一切集合上，即总有集合没有长度. 这是很出人意外的.

现代测度论的研究，将经典的长度、面积概念向各个方向不断推广. 在概率论中，一点的测度不必为 0，一个区间$[a,b]$的测度不必是 $b-a$，任何集合的概率测度都在 0 和 1 之间. 测度值也可以是负的. 在一般拓扑空间里，没有区间之类的基础图形，就用闭集、开集为材料导出内测度和外测度，照样展开测度论. 运动不变性的要求也可以放松，例如只要求平移不变性. 于是在群上也可定义测度，即所谓哈尔测度. 但是正如前述，可列可加性这一条是不变的.

由于出现了测度概念，古老的化圆为方问题也出现了新局面. 波兰著名数学家 Banach 和 Targki 在 1924 年提出等可分解概念：设 A 和 B 是 n 维空间的子集，$A_1, A_2, \cdots, A_n$ 和 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 分别是 A 和 B 的互不相交的有测度的子集，

$$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i, \quad B = \bigcup_{i=1}^{n} B_i,$$

若 A_i 与 B_i 全等，即 $m(A_i)=m(B_i)$，则称 A 和 B 是测度等可分解的. Targki 在

1925 年曾提出，平面上的圆能否和一个具有相同面积的正方形测度等可分解？这一问题迄今尚未解决. 困难在于人们不知用什么方法去分解一个圆.

第五节 三角学:定量化的几何

三角学，原本是几何学的一部分. 后来发展为三角函数，成为微积分研究的对象之一. 中学里的三角学，是计算的基础，运算的工具，也是和谐的周期运动的数学模型.

一、三角学的简单历史

由圆周的弧长求所对应的弦长，即由半弧长 x 求所对应的 $\sin x$，是人们最容易想到数学问题之一. 古巴比伦人和古希腊人，早就关注这一课题. 天文学需要这样的计算，因此，球面三角首先发展起来. 约公元 2 世纪，古希腊的托勒密(Ptolomy，约公元 100—170)完成《天文学大成》的著作，其中包括如何从圆弧长求得相对应的弦长，即正弦之值. 书中通过各种三角关系式制定了 0 度到 180 度之间，每相隔半度的弦长. 这是第一张正弦函数表. 由于这时的三角学还完全依赖于三角形，其作用只是为解三角形服务，因此无须研究超过 180 度的角的正弦. 尽管后来印度和阿拉伯人，对三角学有一些贡献，但主要是提高三角函数表的精度. 其中阿拉伯数学家纳西尔丁(Nasir ad-Din al-Tusi，1201—1274)为球面三角学和三角学的独立做过重要工作. 一个著名的结果是：已知球面三角形的三边可求得三个角，反之亦然. 这是球面三角学不同于平面三角学的定理之一.

欧洲度过中世纪黑暗之后，三角学逐渐发展起来. 哥白尼的弟子等为了天文观察精度的需要，作出了每隔 10 秒的正弦和正切数表(1569). 纳皮尔在 1614 年发明对数，简化了三角计算.

一个重大的飞跃出现在 17 世纪. 韦达(Francois Viete，1540—1603)在 1615 年给出用 $\sin x$ 表达 $\sin nx$ 的公式. 这标志着三角学开始探索内部的深层关系. 棣莫弗(Abraham De Moivre，1667—1754)获得引入复数以后的三角公式

$$(\cos\phi+\mathrm{i}\sin\phi)^n=\cos n\phi+\mathrm{i}\sin n\phi.$$

当微积分诞生之后，在欧拉的《无穷小分析引论》中，把三角学当作研究三角函数的学科. 三角学在这时不仅已经从天文学完全独立出来，而且发展为内容丰富的学科. 用解析方法研究三角函数得到许多新的公式，包括三角函数的级数展开：

$$\sin z=z-(1/3!)z^3+(1/5!)z^5-\cdots,$$
$$\cos z=1-(1/2!)z^2+(1/4!)z^4-\cdots,$$

他所发现并论证的公式:

$$\exp(\mathrm{i}\,\phi)=\cos\phi+\mathrm{i}\sin\phi$$

被认为是数学上最奇妙、最深刻的数量关系之一.

在这里我们已经看不到三角形边角关系的影子了.到了19世纪,法国数学家傅里叶(J. Fourier,1768—1830)发现解析函数可以展开为三角级数,创立了调和分析的学科,其应用遍及整个数学.在三角级数基础上改良的小波分析,正在电子信息时代起着十分关键的作用.

中国学者在三角学上乏善可陈.尽管由相当发达的天文学,出现了"重差术"的计算方法,但是并没有完整的三角学.实际上,中国没有一般的"角"的概念.中国古代数学反复使用"直角三角形"的勾股定理求得问题的解决.三角学的落后,是中国古代算学的缺陷之一.

三角学输入中国,始于1631年徐光启和邓玉函、汤若望合编的《大测》一书.此后中国数学家开始关注三角函数的研究.比较著名的有戴煦(1805—1860).他的代表作是1845—1852年间出版的《求表捷术》,在对数表、三角函数表研究上有特殊的贡献.例如,戴煦得到公式

$$\tan x=\sum(D_n/(2n-1)!)x^{2n-1},$$

其中的 D_n 依次为1,2,16,272,7 936,353 792,…,今称戴煦数(国外的文献把余割函数展开式 $\sec x=\sum(E_n/2n!)x^{2n}$ 的系数称为欧拉数).得到这一展开的方法有许多独到的技巧.但是,如果使用泰勒公式,这是很容易得到的.可惜戴煦并不掌握微积分思想和方法.

1877年,华蘅芳和薛凤祚合译英国海麻士的《三角数理》,用作学校的教材,三角学在中国渐渐得到普及.

一、三角学是欧氏几何的数量化

三角学起先的目标是解三角形,即研究三角形的各种边角关系.显然,这是对欧氏几何的重要补充.如果说欧氏几何主要用定性的方法研究三角形,那么三角学就是定量地研究三角形的边角关系.在这个意义上说,三角学是代数和几何学之间的桥梁.

事实上,欧氏几何学研究三角形的边角关系,只能得出"大边对大角,小边对小角"这样定性的结论.三角形三边之间的关系,欧氏几何得到了直角三角形的"勾股定理"——"直角边长的平方和等于斜边长的平方".它是人类数学文化的瑰宝.但是,对于一般三角形的三个边长有怎样的关系呢?欧氏几何只有"三角形两边之和大于第三边,两边之差小于第三边"之类的定性分析.三角学把三角形的边角关系完全定量化了.正弦定理刻画了"边长及其对应角的正弦之比"的

恒定性质，余弦定理更是描述了三边之长的关系，把勾股定理作为一个特例. 这样深刻的工作，定量地描述，曾经有力地推动古希腊天文学以及航海学的发展. 中学数学把解三角形作为重要的组成部分，使得平面几何学的三角形部分，成为可以计算的、量化了的完整知识.

我们通常提到"数形结合"时，马上想到解析几何学. 确实，笛卡儿利用坐标系把位置和坐标相连接，把方程、曲线、函数及其图形有机地统一起来，当然是"数形结合"的光辉典范. 但是，我们往往忽略了，三角学也是数形结合的一个重要方面.

在这里，我们列举荷兰弗赖登塔尔数学教育研究所拟订的一道数学题：三点距离问题. 甲离学校 10 千米，乙离甲 3 千米，问乙离学校几千米？

这是一道训练学生的数学表示能力的好题. 首先，问题没有说甲、乙、学校是否在一条直线上. 如果不在一条直线上，那么它们的位置应该在如图 2－6 的两个圆上. 架好坐标系，可以写出它们的方程，用乙的坐标和学校的坐标表示彼此的距离. 其实，表达这样平面上距离的方法还有很多. 用参数方程，甚至用复数也可以. 但是，最重要、最合理的方法就是用三角方法. 这是典型的已知两边求第三边问题，上述的方法，大多是定性的认识和表示，而余弦定理用定量的方法成为解决此题的最佳途径.

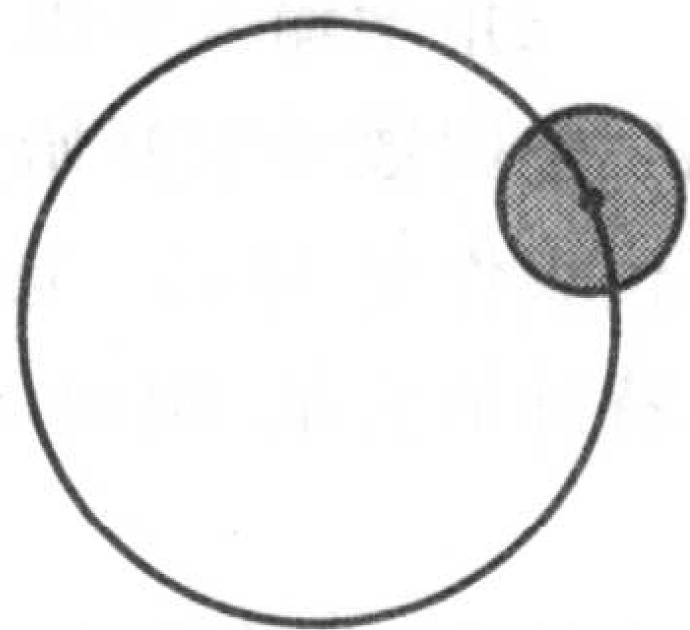


图 2－6

三、解三角形到研究任意角的三角学，衍生出三角函数，是一个数学认识上的飞跃

三角学的发展有两个明显的阶段. 静态的解三角形阶段以及处理任意角的三角函数阶段. 许多教科书简单地把初中数学里直角三角形的正弦、余弦、正切概念，直接就推向三角函数，缺少必要的铺垫和深化过程. 这样做，不仅增加了教学上的困难，更是混淆三角学的两个发展层次，在数学思想上得不到必要的深化和提高.

解三角形是静态的、角度不超过 180 度的、纯粹计算的数学内容. 但是到三角函数阶段，则是动态的、处理任意角的、思辨性的数学科目. 这二者的差异非常巨大，不能期望学生能够自然而然地迁移过去.

通常的办法是引入单位圆，充分显示三角函数的变量特征. 这是由静态向动态转变的必由之路. 此外，诱导公式、符号确定等基本技能的训练，也无不和单位圆密切相关.

三角函数的恒等变换是一项基本技能，需要熟练掌握. 余弦函数的和角公

式,证明没有普遍意义,可以不记.但是,这些公式需要操练,形成技能,不可忽略.这些规则,没有多少道理可讲,只能在操作中逐渐体会,在运用中加深理解.但是,我们并非一味提倡死记硬背.在三角函数的理解上应该多下工夫.为此,我们建议,在三角函数教学中充分体现三角函数的以下几个特征:

周期性 三角函数的根本重要性在于的周期性.教学中无论如何要联系现实中的音乐,单摆,电磁波,探讨物理学中的"单摆"、"振动"、"潮汐"运动事物,体会三角函数是重要的数学模型.在实际教学中,有时为了赶进度,忽视周期性本质的认识,却将练习的重点,放在三角函数的最小正周期的求法等等细枝末节上去,那是不正确的.

和谐性 三角函数的周期性,不同于一般的周而复始,例如课程表、月份牌那样.三角函数的图像具有和谐的特征.和谐表现在正负相间、强弱有序,变化温和.用音叉来表示,动听悦耳.用图像来表示,赏心悦目.这种表达人类美好情感的数学,是难得遇到的,应该给学生以美好的享受.

相位性 相位是理解三角函数变化的难点,又是三角函数变化多端的关键.在振幅、频率和相位三者中,需要对相位着重进行探讨.仅仅就数学图像进行解释是不够的.运用"单摆"、"三相交流"电波进行解释,务必弄懂.

原始性 三角函数是一种不定元.大家知道,用不定元 x 可以构造多项式,分式、无理式;泰勒级数展开,就是将一般函数展开为多项式.同样,$\sin x$ 和 $\cos x$ 也可以构造各种三角多项式,用来逼近其他函数.用示波器,可以看到一个声音怎样被分解为一些基础三角函数之和.在今天的信息社会,这是极端重要的思想.实际上,传送一个函数要无穷多个点.但是传送一个函数的傅里叶级数只要传送若干个系数就行了.仅此一点就知道在信息传输技术不断发展的今天,三角级数会是何等的重要!

在现今的数学课程中,三角学已经不再是独立的课程,但是它的学术价值依然非常重要.任何轻视三角学,淡化三角学、阉割三角学的想法都是不正确的.

四、张景中用面积法处理三角学

2002 年,张景中推出《新概念几何》[①],其中对三角学作了全新的处理.他把边长为 1、夹角为 α 的菱形的面积定义为 $\sin\alpha$,由此研究正弦的性质,到处理余弦,用面积的方法证明大量的平面几何问题,把三角学和几何学打成一片,别具一格,极有新意.在此摘录若干,以窥一斑.

---

① 张景中.新概念几何.北京:中国少年儿童出版社.2002 年第一版.2004 年最新版.下篇:平面三角解题新思路

定义 3　边长为 1，有一个角为 A 的菱形的面积，叫做 A 的正弦，记作 $\sin A$.

正如定义了正方形面积，可以计算出边长为 a，b 的矩形面积为 ab 一样，由边长为 1 的菱形面积，也可以导出边长为 a，b 的平行四边形的面积为 $ab\sin A$. 于是，已知两边长分别为 a，b、夹角 A 的三角形的面积就是

$$(1/2)a\cdot b\cdot\sin A.$$

有了这一公式，我们就可以做很多事情（尽管我们还没有对"正弦"做任何解释）.

下面几个题目，应当算是比较难的题目了：

例 1　已知 AD 是 $\triangle ABC$ 中 $\angle BAC$ 的平分线（如图 2-7），求证：

$$\frac{AB}{AC}=\frac{BD}{DC}.$$

证明　$$\frac{BD}{DC}=\frac{\triangle ABD}{\triangle ADC}=\frac{\frac{1}{2}AB\cdot AD\sin\alpha}{\frac{1}{2}AC\cdot AD\sin\alpha}=\frac{AB}{AC}.$$ □

例 2　在等腰直角三角形 ABC 的斜边 AB 上取一点 P，使 $AP=2PB$. 自 A 引 PC 的垂线交 BC 于 M（图 2-8）.

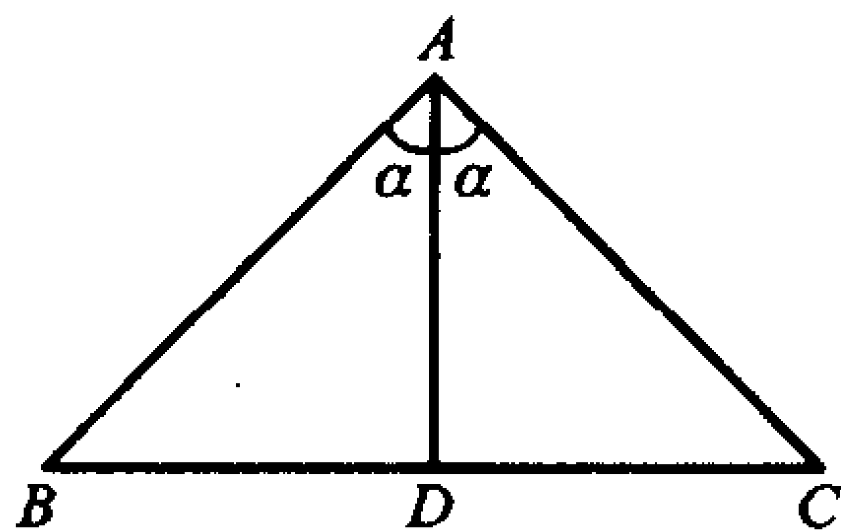


图 2-7

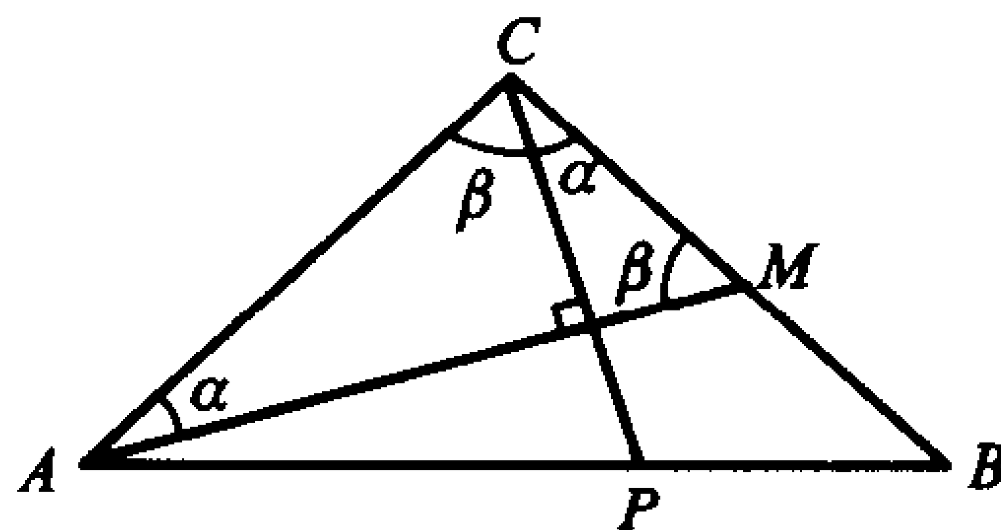


图 2-8

求证：M 是 BC 中点.

证明　由 $AM\perp PC$ 可知 $\angle MAC=\angle BCP$.

$\angle AMC=\angle ACP$，故：

$$2=\frac{AP}{PB}=\frac{\triangle ACP}{\triangle BCP}=\frac{\frac{1}{2}AC\cdot PC\cdot\sin\beta}{\frac{1}{2}BC\cdot PC\cdot\sin\alpha}=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha},$$

即 $\sin\beta=2\sin\alpha$，又由三角形面积公式得

$$AC\cdot AM\cdot\sin\alpha=2\triangle AMC=CM\cdot AM\cdot\sin\beta$$
$$=2CM\cdot AM\cdot\sin\alpha,$$

所以 $AC=2CM$.

由 $AC=BC$,可知 $BC=2CM$.

例 3　设 AB 是直角三角形 ABC 的斜边,$h=CD$是斜边上的高(如图 2-9).

求证:$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{h^2}$.

图 2-9

证明　如图 2-9,记$\angle A=\alpha$,$\angle B=\beta$,则$\angle ACD=\beta$,$\angle BCD=\alpha$.

显然有

$$1=\frac{\triangle ABC}{\triangle ABC}=\frac{\triangle ACD}{\triangle ABC}+\frac{\triangle BCD}{\triangle ABC}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}AC\cdot CD\cdot\sin\beta}{\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin\beta}+\frac{\frac{1}{2}BC\cdot CD\cdot\sin\alpha}{\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin\alpha},$$

所以
$$\frac{bh}{ac}+\frac{ah}{bc}=1.$$

再利用 $ab=2\triangle ABC=ch$,得 $c=\frac{ab}{h}$,代入上式整理即得.　□

现在,我们来研究“正弦”——$\sin A$ 的性质.

正弦性质 1　$\sin 0^\circ=\sin 180^\circ=0$;$\sin 90^\circ=1$.

道理很简单:菱形的一个角为 0°或 180°时,菱形就退化为线段,面积当然是 0. 菱形的一个角为 90°时,菱形就是正方形. 因此,$\sin 90^\circ$就是单位正方形的面积,当然是 1,如图 2-10.

正弦性质 2　$\sin(180^\circ-\alpha)=\sin\alpha$.

这是因为,当菱形有一角为 α 时,必有另一个角等于 $180^\circ-\alpha$. 因此,$\sin\alpha$ 和 $\sin(180^\circ-\alpha)$按定义表示的是同一块面积. 如图 2-11.

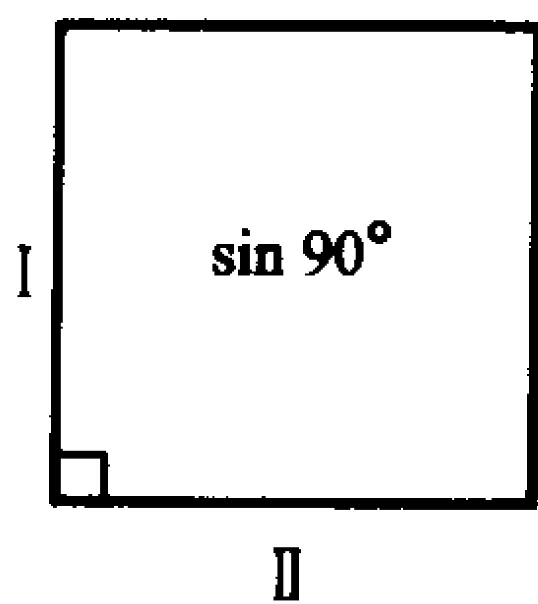


图 2-10

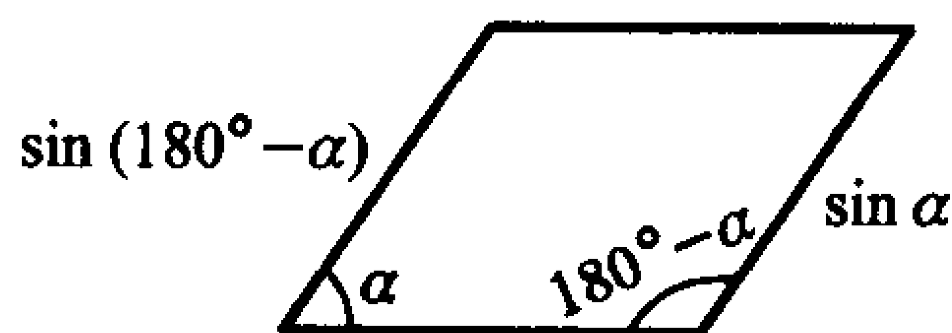


图 2-11

当菱形一个角为 0°时,面积为 0. 这个角慢慢变大时,菱形面积也随着增大,

直到变为正方形.这个角继续变大时,菱形面积又变小,直到变成0.这种性质也体现在正弦的性质上.

正弦性质3　如果$0^\circ \leqslant \alpha < \beta \leqslant 180^\circ$并且$\alpha + \beta < 180^\circ$,则

$$\sin\alpha < \sin\beta.$$

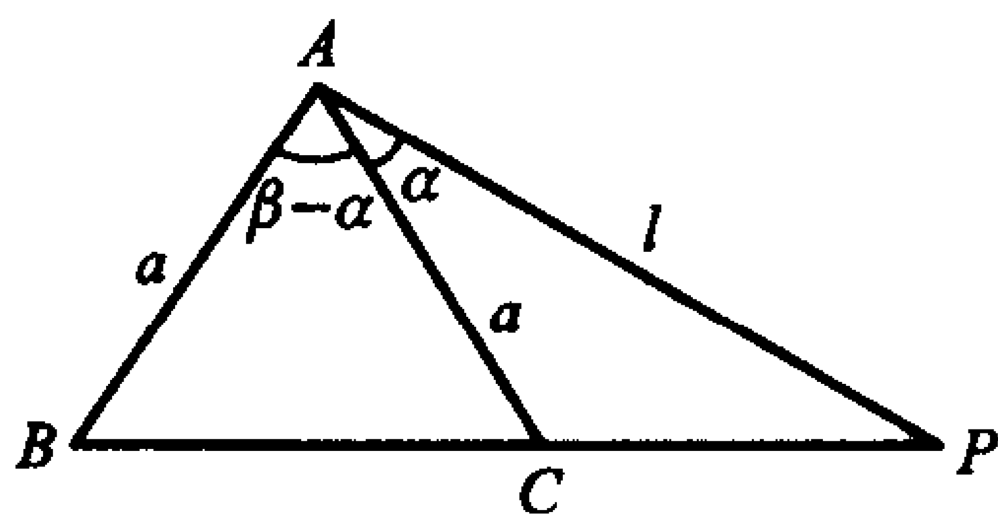


图2-12

证明　设$\triangle ABC$是顶角等于$\beta-\alpha$的等腰三角形,延长其底边BC至P使$\angle PAC=\alpha$,则$\angle PAB=\beta$,于是,若记$AB=AC=a$,$AP=l$,便有

$$al\sin\beta = 2\triangle PAB > 2\triangle PAC = al\sin\alpha,$$

所以
$$\sin\beta > \sin\alpha.$$
□

值得一提的是:题设条件$\alpha+\beta<180^\circ$用在什么地方了呢?仔细分析便会发现:如果没有这个条件,证明中"延长底边BC至P使$\angle PAC=\alpha$"就不一定能办到了.

这个道理,请你把它想明白.

根据性质3和性质2,马上得到

正弦性质4　当$0^\circ \leqslant \alpha \leqslant 90^\circ$时,$\sin\alpha$随$\alpha$的增大而增大;当$90^\circ \leqslant \alpha \leqslant 180^\circ$时,$\sin\alpha$随$\alpha$的增大而减少.因此有:

正弦性质5　当$0^\circ \leqslant \alpha \leqslant 180^\circ$时,$0 \leqslant \sin\alpha \leqslant 1$.

正弦性质6　当$0^\circ \leqslant \alpha \leqslant 180^\circ$,$0^\circ \leqslant \beta \leqslant 180^\circ$时,如果有$\sin\alpha=\sin\beta$,则$\alpha=\beta$或$\alpha+\beta=180^\circ$.(这是性质2的逆定理)

正弦性质7　在$\triangle ABC$中,如果C为直角,则

$\sin A=\frac{a}{c}$,$\sin B=\frac{b}{c}$,如图2-13.

这里a、b、c分别是$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$的对边.

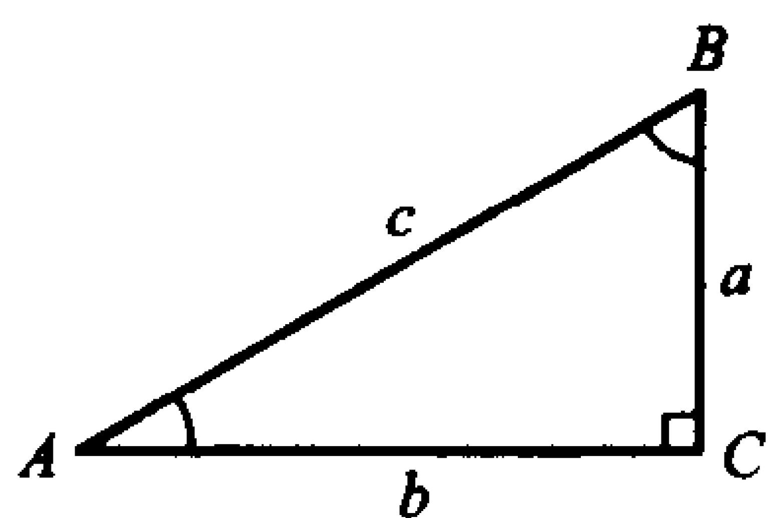


图2-13

证明　由面积公式:

$$ab = 2\triangle ABC = bc\sin A,$$

所以$\sin A=\frac{a}{c}$.

同理可证$\sin B=\frac{b}{c}$.　□

在有些书上,直接规定"直角三角形中,锐角的正弦$\sin A$等于$\angle A$的对边与斜边之比".由上述推论可见我们的定义——"$\sin A$是有一个角为A的边长为1的菱形的面积"——在A为锐角的情况下与这些书上的定义一致.这种用直角三角形的边长之比来定义正弦的方法,是18世纪的大数学家欧拉首先引进

的.但是,现在看来,欧拉的这种定义方法有两个缺点:

(1) 只定义了锐角的正弦,用起来不方便.例如,当$\angle B$为钝角时,面积公式$\triangle ABC=\frac{1}{2}AB\cdot BC\sin B$便要另加说明了.

(2) 用直角三角形边长的比定义正弦,先要证明这么一个事实:不管直角三角形$\triangle ABC$是大是小,只要$\angle A$定了,$\angle A$的对边与斜边的比也就定了.这就要先建立起相似三角形的一套理论,再引入正弦.正弦在几何里的应用就大大减少了!

但是,在工程技术中,$\sin A=\frac{a}{c}$这个公式十分有用.欧拉直接把这个有用的公式取作定义,也有其方便之处.

这样,我们就把通常的正弦定义和菱形面积定义统一起来了.由于,用面积方法可以证明所有的平面几何定理.有了三角学作为辅助,平面几何进一步代数化,定量化.

第六节　分形几何概观

分形的维数,可以是分数.这是人类度量现实空间维数的又一发展.我们把它作为度量几何的一部分.

分形是20世纪初出现的一种研究对象,当时是数学象牙塔中少数奇才发现的"数学怪物",是不入数学研究主流的"病态"的图形,甚至可以说是一种不登大雅之堂的雕虫小技.但是到了20世纪末,情况出现了根本性的转变.今天,分形已成为一门严肃的数学分支,成为严肃数学家的研究对象;成为一门艺术,一门有着广泛应用的艺术;成为一种工具,图像压缩、信息传输的工具;成为一种上帝创造的指纹、鉴定特定的地质纪元、矿脉类型及其含量的"指纹".

一、分形是一种几何

我们熟知的几何是欧几里得几何,有较高数学修养的还知道黎曼几何,非欧几何等等.在这些几何空间中可以引进坐标架,建立坐标,也可以引进维数的概念.一个物体的欧氏维数是能容下它的空间之最低维数,而其拓扑维数则是其独立坐标的个数.

欧几里得几何、黎曼几何、非欧几何等研究的对象是直线、圆、平面、球、锥面等等,这些都是从客观世界中抽象出来的几何对象.因此也可以说欧几里得几何、黎曼几何、非欧几何等是理想化了的几何.

而我们日常生活中见到的山像锥又不是锥,云、树像球又不是球,海岸线、河

岸线像折线又不是折线. 它们都是具有某种奇异性的几何对象,我们将会看到它们都具有某种分形结构. 研究物体的分形结构的几何学称为分形几何. 所以,在某种意义上可以说分形几何是更接近现实的几何. 当欧几里得几何、黎曼几何在宏观世界大行其道,罗巴切夫斯基几何在宇宙世界得到应用之时,分形几何理当在微观世界大有用武之地.

二、分形的例子

1. Cantor 集

在许多数学书中提及的 Cantor 集,就是一个一维分形. 它的构造过程为:将区间[0,1]等分为三段,去掉中间的一段,将左右两段再一分为三去掉中间一小段,如此重复,余下部分的极限即为 Cantor 集,如图 2-14 所示.

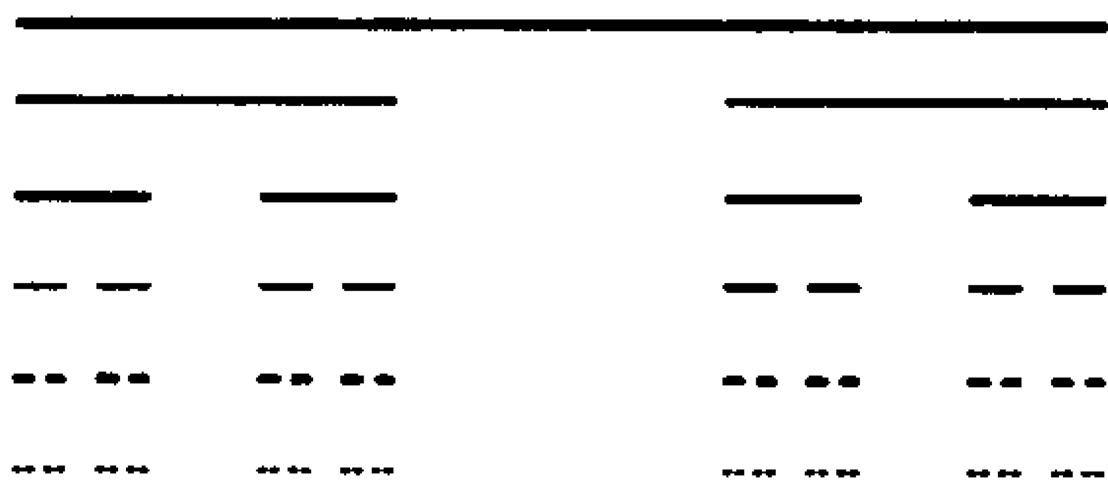


图 2-14 Cantor 集的构造过程

2. Koch 雪花

将一条线段分为三段,以中间一段为一边向外作一等边三角形,然后将这一段去掉,加上等边三角形的余下两边,对所得长度为原来 1/3 的四条小线段重复上述操作,即得 Koch 雪花,如图 2-15 所示.

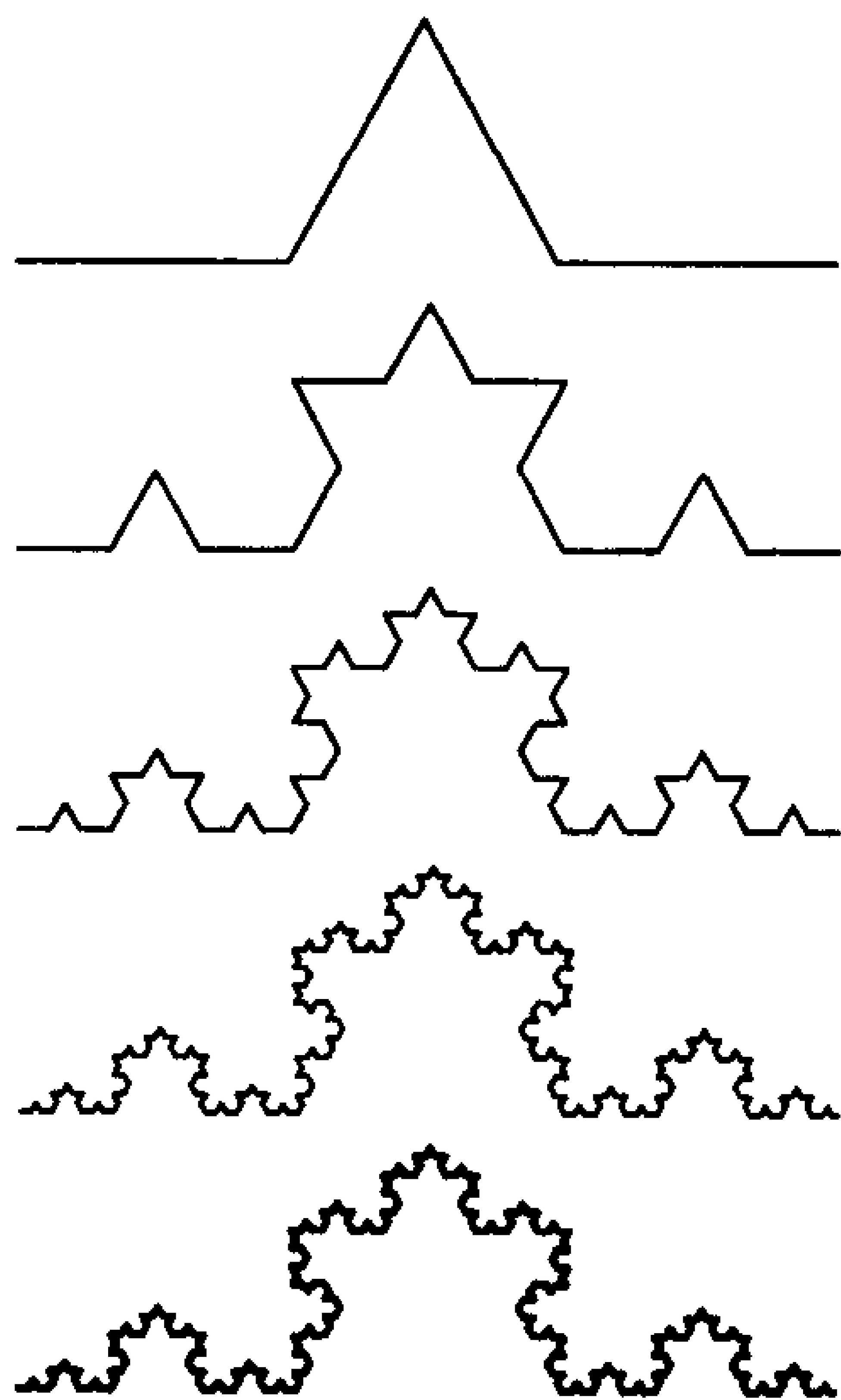


图 2-15 Koch 雪花曲线的构造过程

3. Sierpinski 地毯和 Sierpinski 海绵

将一个正方形等分成 9 个小正方形,去掉中间一个,对其余 8 个重复上述过程,即得 Sierpinski 地毯,如图 2-16 所示.

将一个正方体等分成 27 个小正方体,将不在大正方体棱边上的 7 个去掉,对余下 20 个重复上述过程,即得 Sierpinski 海绵,如图 2-17 所示.

4. 叶子

它是用一组双曲迭代函数对一点进行随机迭代得到的,如图 2-18 所示.

5. Mandelbrot 集与 Julia 集

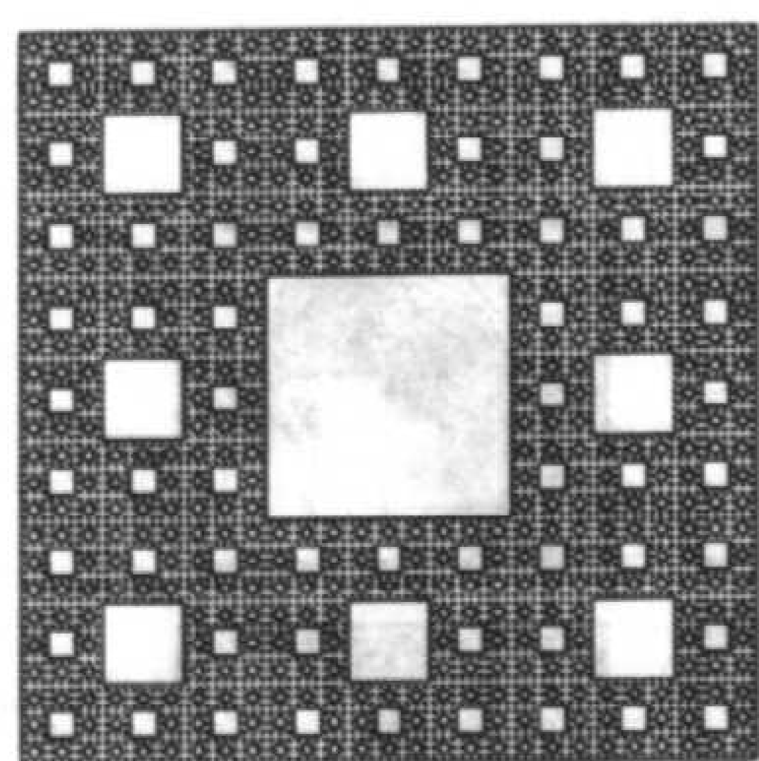


图 2－16　Sierpinski 地毯

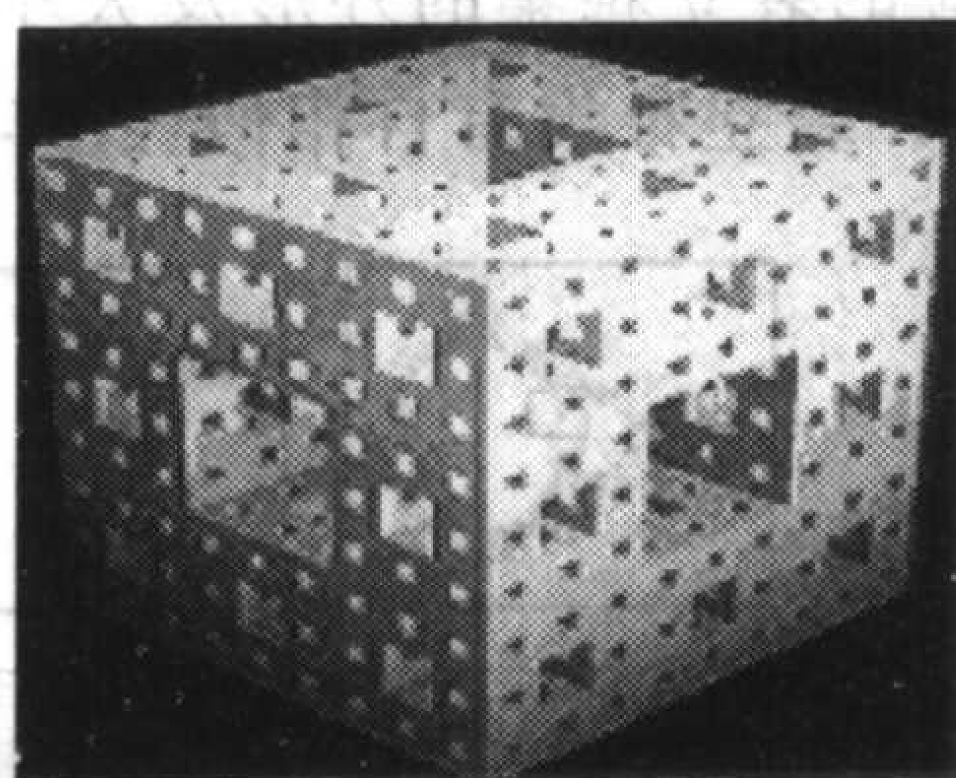


图 2－17　Sierpinski 海绵



图 2－18　用随机迭代法得到的叶状图形

被誉为现代分形之父的 B. B. Mandelbrot（耶鲁大学教授，IBM 公司 T. J. W 研究中心高级研究员，美国国家科学院院士，美国艺术与科学研究院院士）对分形下过如下的定义：

一个集合，如果其 Hausdorff 维数（一种分维）严格大于其拓扑维，则称该集合为分形集.

下面我们来考察几种由极其简单的迭代法则生成的具有意想不到的复杂结构的分形图. 考虑复函数（复映射）：

$$f(z,c,p)=z^p+c.$$

我们将所有迭式序列有界的点集之边界集

$$J(p,c)=\partial\{z:z,f(z),f_2(z),\cdots,f_n(z),\cdots\text{有界}\}$$

称为裘立雅（Julia，1920）集，而将使得裘立雅集 $J(p,c)$ 连通的所有复数 c 的集合称为曼特勃洛托（Mandelbrot，1980）集.

图 2－19 展示了曼特勃洛托集及其七级放大区域（白色表示集合内部区域，灰黑色表示集合附近区域，有黑色条纹处为远离集合的区域），难怪人们要将曼特勃洛托集称为数学恐龙. 而图 2－20 则展示了曼特勃洛托集与裘立雅集之间的关系. Peitgen 曾将它们之间的关系比作书和页，曼特勃洛托集是一本巨大的书，而一个裘立雅集只是其中的一页. 根据点 c 在曼特勃洛托集中的位置就能够

预测相应的裘立雅集的外形及大小．曼特勃洛托集是一本可以查阅所有裘立雅集的词典．裘立雅集有自相似性质，而曼特勃洛托集没有这种性质．

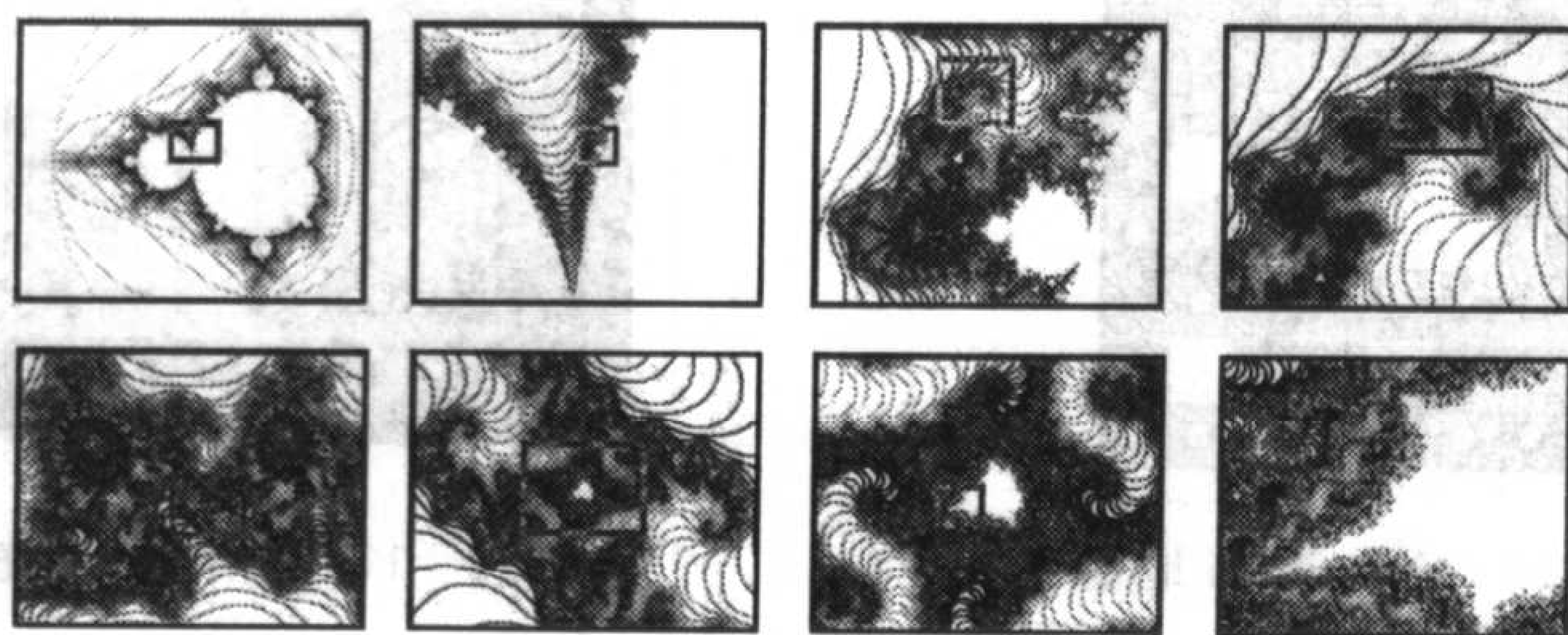


图 2－19 曼特勃洛托集及其七级放大区域图

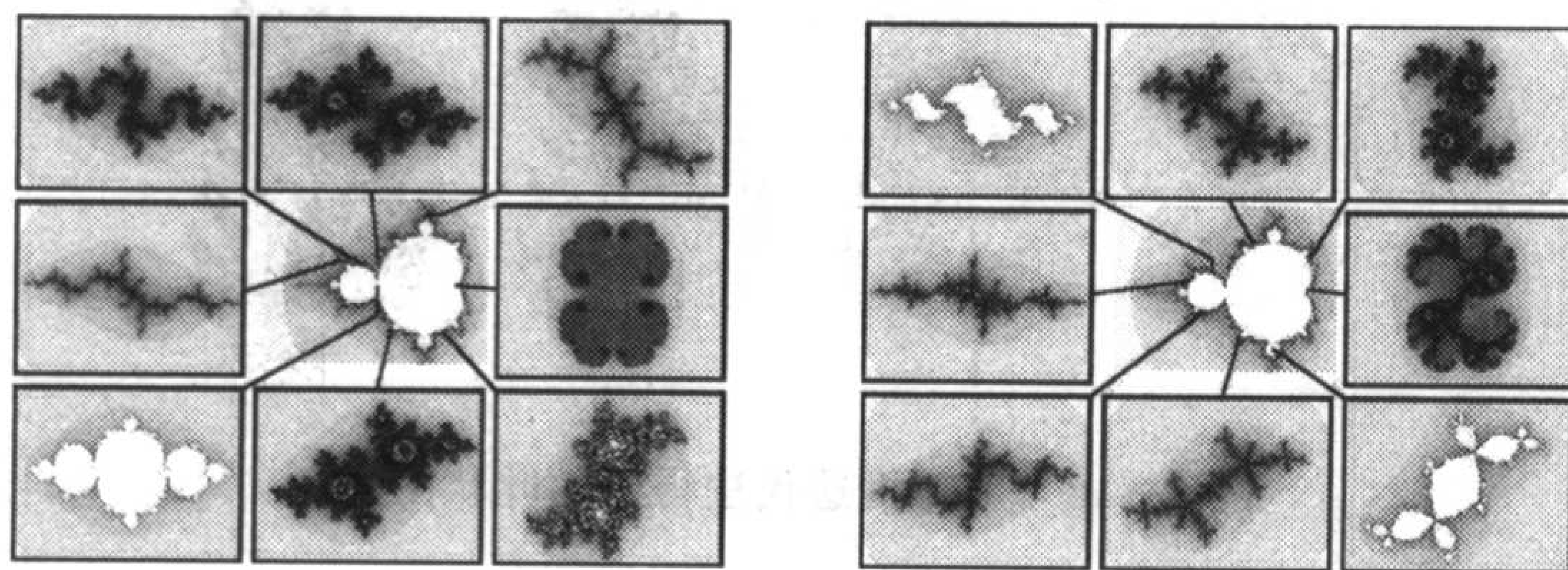


图 2－20 曼特勃洛托集与裘立雅集

三、分形的维数

让我们先来看看几何对象的维数是如何定义的．

维数与测量有密切关系，测量一个几何图形时要用一个与图形的维数 d 相一致的“单位”l^n（$n=d$）去测，才会有确定的结果．例如，量体积要用立方体 l^3 为单位，量面积要用正方形 l^2 为单位，量长度要用线段 l 为单位，等等．如果“单位”的维数 n 与几何图形的维数 d 不相等的话，那么 $n<d$ 时结果为无穷大；$n>d$ 时结果为零．也就是说，当 $n\neq d$ 时，这个“单位”不能用来测量几何图形．

事实上，几何与尺度是密切相关的．首先让我们来观察长度和维数与尺度的关系．

如果让两个小组来度量长江的长度，其中一组以 10 m 为单位，而另一组以 1 cm 为单位．最后我们发现，两个小组量得的长度有很大的差别，后一组所量得的长度要比前一组量得的大得多．这是因为河岸线、海岸线都具有分形结构，当度量单位趋于零时其长度趋于无穷大．

让我们再来考察一个毛线球的维数．我们先在 200 m 的距离上来观看它，这

时它是一个点，是零维的. 其次在 20 m 的距离上来观看它，这时它是一个球，是 3 维的. 再在 2 m 的距离上来观看它，这时它是由毛线绕成的一个球，是 1 维的. 最后在 2 cm 的距离上来观看它，这时可发现绕成球的毛线是由千丝万缕的绒毛按相似的结构织成的.

分形维数的定义有很多种，如：Hausdorff 维数、自相似维、容量维、信息维、关联维、Lyapunov 维、盒子维等等. 下面我们给出自相似维的定义.

定义　若 $A\in\mathbf{R}^n$ 总可以逐级分成 N 个同样大小的与原集合相似的子集，每次的缩小因子为 $\frac{1}{b}$，则称

$$Ds=\frac{\ln N}{\ln b}$$

为 A 的自相似维数.

例 1　Koch 曲线的自相似维数为 $Ds=\frac{\ln 4}{\ln 3}=1.261\ 9$，Sierpinski 三角形的自相似维数为 $Ds=\frac{\ln 3}{\ln 2}=1.585$.

四、分形的应用

分形理论已经得到了广泛的应用，例如在装饰设计、图像压缩、地质和采矿勘探等领域的应用已产生了巨大的经济效益. 下面我们介绍吸引子定理在图形模拟及构造分形中的应用. 其原理是构建一组适当的线性迭代映射的和

$$f_i(x)=A_ix+E_i,i=1,2,\cdots,n,$$

利用计算机快速迭代出各种图形，如蒙娜丽莎的像.

设 (X,d) 为距离空间，$0<s<1$，若映射 $w:X\to X$ 满足

$$d(w(x)-w(y))\leqslant sd(x,y),x,y\in X,$$

则称 w 为压缩映射.

显见平面上的一个线性变换

$$w(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{Ax}+\boldsymbol{E},\quad \boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{E}=\begin{pmatrix}e\\ f\end{pmatrix}$$

至多有 6 个参数，从而 3 个初始点及其像点可唯一地确定一个线性变换.

若 $w_i(x)=A_ix+E_i$ 为线性压缩映射，则称

$$\{X;w_i,i=1,2,\cdots,N\}$$

为双曲迭代函数系.

在平面上的一个双曲迭代函数系至多有 $6N$ 个参数.

吸引子定理 若$\{X;w_i,i=1,2,\cdots,N\}$为一组双曲迭代函数系，则集合映射

$$W(B)=w_1(B)\cup w_2(B)\cup\cdots\cup w_N(B),B\subset X$$

也是压缩映射，从而存在唯一不动点$D\subset X$(即$W(D)=D$)，且对任意$B\subset X$，

$$W^n(B)=W(W^{n-1})(B)\to D,n\to\infty.$$

称不动点D为双曲迭代函数系的吸引子.

这里，集合间的距离为Hausdorff距离h：

$$d(x,B)=\min\{d(x,y):y\in B\},$$
$$d(A,B)=\max\{d(x,B):x\in A\},$$
$$h(A,B)=\max\{d(A,B),d(B,A)\}.$$

现在介绍用确定法在平面$\mathbf{R}^2$上生成吸引子的步骤和例子：

(a) 任取平面上一个集合A_0，

(b) 计算$w_i(A_0)$和$A_1=\bigcup w_i(A_0)$，

(c) 擦去A_0并打上A_1，

(d) 计算$w_i(A_1)$和$A_2=\bigcup w_i(A_1)$，

(e) 重复(c)和(d)共m次，m足够大.

例2 Sierpinski三角形的生成过程.

若取定双曲迭代函数系为：

$$w_1:w_{11}(x,y)=\frac{x}{2},w_{12}(x,y)=\frac{y}{2},$$

$$w_2:w_{21}(x,y)=\frac{x}{2}+5,w_{22}(x,y)=\frac{y}{2},$$

$$w_3:w_{31}(x,y)=\frac{x}{2},w_{32}(x,y)=\frac{y}{2}+5,$$

其中每个w_i将一个正方形变为一个面积为原来$\frac{1}{4}$的小正方形.再取初始集合为$\{(x,y):0\leqslant x\leqslant 10,-10\leqslant y\leqslant 0\}$(也可任取)，即可得到如图2-21所示的Sierpinski

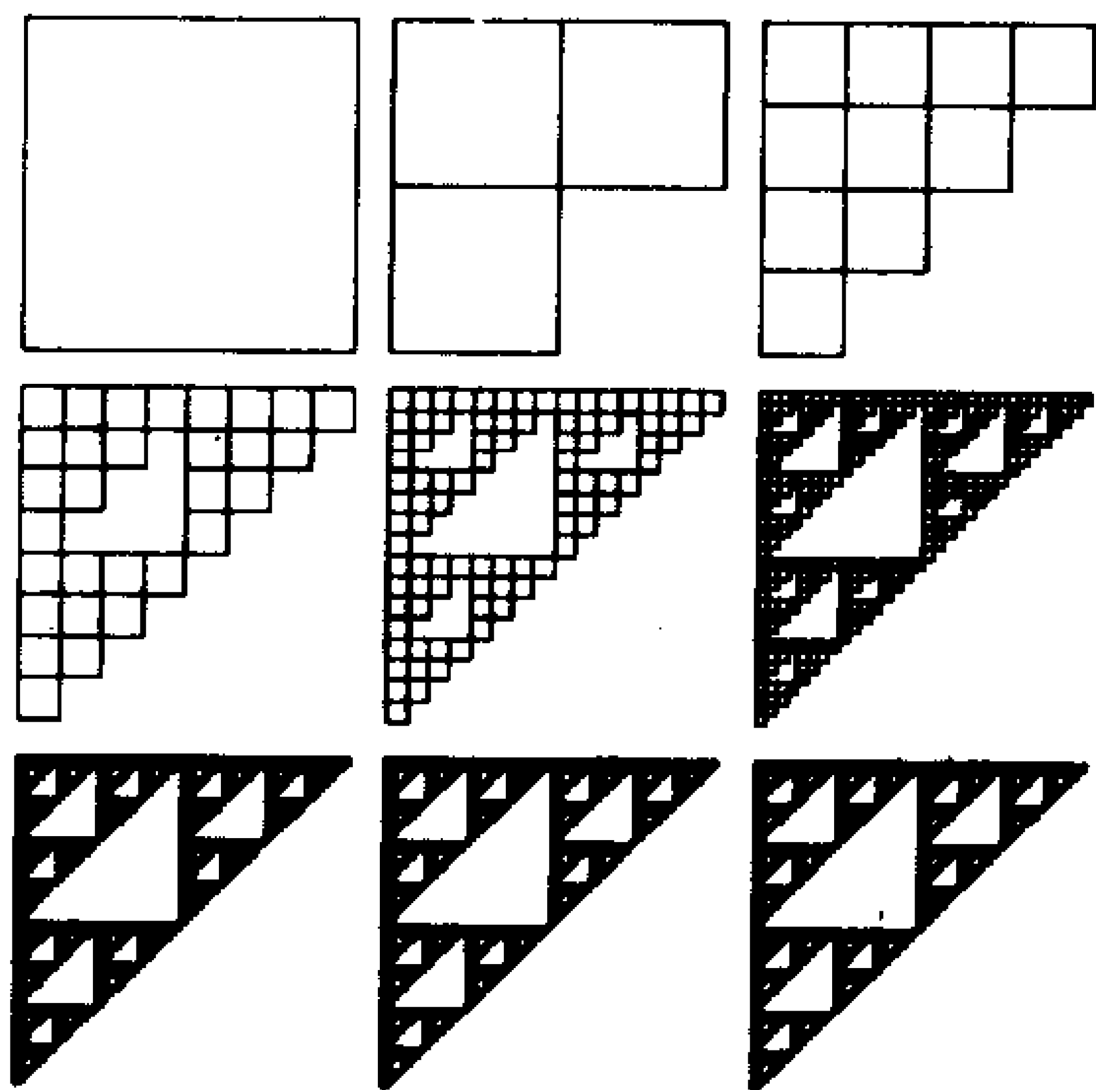


图2-21 用确定法生成Sierpinski三角形的过程

三角形.

除确定法外，生成分形图像的其他方法还有随机迭代法，膨胀法等.

下面考虑反问题：已知分形或某图形（总可将其视为一个分形），求双曲迭代函数系.这时我们可以应用拼贴定理，即利用公式

$$D=WD=w_1(D)\cup w_2(D)\cup\cdots\cup w_N(D).$$

形象地说，如果试图找一个 IFS（迭代函数系），使其吸引子与某给定的集合相似或相近，我们必须在给定的图像空间中找一组压缩仿射变换，使得将给定集合分别被各个压缩映射变换后的像（为其自身的各个小"拷贝"）能够拼贴成一个集合，并且该集合在 Hausdorff 距离下尽量地相近于原来给定的集合.

对于一幅很复杂的图像，如果找到了一个可近似该图形的 IFS，其中含有 N 个线性变换，则只需确定 $3N$ 个点及其像，或至多 $6N$ 个参数即可确定或传输这幅图像.这无疑会大大降低数据量.

由上例中双曲迭代函数 w_i 的几何意义，知上面 Sierpinski 三角形的生成过程及后面的习题 2 和 3 可作为已知分形或某图形求双曲迭代函数系的例子.

五、分形进入中学数学课堂

分形不仅可以进入大学生的数学实验课，还完全可以进入中学数学课堂.它有助于学生更好地认识世界的复杂性，多样性，自相似性，对称性，并在进一步体验到世界之美妙的同时，更好地理解数学、喜爱数学，提高数学的应用能力，增强创造能力和想像能力.

例如中学生熟悉的方程 $x^2-x-0.5=0$ 的两个实根 $x=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$ 可视为迭代映射

$$x_{new}=x_{old}^2-0.5$$

的两个不动点，其中 $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ 是不稳定的，而 $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ 和无穷远是吸引子.

将此迭代映射推广到复平面上：

$$z_{new}=z_{old}^2+c,$$

即

$$(x+\mathrm{i}y)_{new}=(x+\mathrm{i}y)_{old}^2+(x_c+\mathrm{i}y_c).$$

当取 $x_c+\mathrm{i}y_c=-0.1+0.6\mathrm{i}$ 时，初始点 $x_0+\mathrm{i}y_0=0.4+0.7\mathrm{i}$ 的轨道（迭代点列）是发散趋于无穷的；初始点 $x_0+\mathrm{i}y_0=0.2+0.3\mathrm{i}$ 的迭代点列是收敛的.事实上，

$$x_1+\mathrm{i}y_1=-0.15+0.72\mathrm{i},$$

$$x_{10}+\mathrm{i}y_{10}=-0.1240+0.5406\mathrm{i},$$

$$x_{98}+\mathrm{i}y_{98}=-0.2218+0.4153\mathrm{i},$$

$$x_{99}+\mathrm{i}y_{99}=-0.2233+0.4157\mathrm{i}.$$

根据以上迭代公式编程并进行迭代、绘图，对不同的 c 值即可得到各种不同的吸引域和裘立雅集.

结语

“病态”的几何结构原本是极其自然的，自然界的许多对象的几何图形可以由极其简单的演化规则演化而成. 分形理论有助于解释为什么少量的遗传物质（遗传密码）可以发育成极其复杂的结构，正如一条 Peano 曲线可以“填满”一个正方形，占人体 5%的血管布满了人体的每一部分一样. 作为一门有着广泛应用的数学分支，分形已经进入各门科学，进入学生的课堂，进入寻常百姓的日常生活，甚至已被制成引人入胜、启迪智慧、老少皆宜、百看不厌的“连环画”.

习 题 2.6

1. 计算 Cantor 三分集，Sierpinski 地毯的分维数.

2. 已知 Sierpinski 三角形位于区域$\{x\geqslant 0, y\geqslant 0, x+y\leqslant 20\}$之中，试求生成此分形的迭代函数系.

提示：$N=3$，先在两个方向上各压缩至$\frac{1}{2}$，再将原点分别平移至(0,0)，(0,10)和(10,0)，初始正方形为[1,20]×[1,20].

3. 试求生成 Koch 曲线的迭代函数系(位于矩形[0,3]×[0,1]内).

提示：$N=4$，先在两个方向上各压缩至 1/3，然后对 w_1，w_2 将原点分别平移至(0,0)和(2,0)；对 w_3 先旋转 $\pi/3$，再平移(1,0)；w_4 先平移(−1,0)，再旋转 $-\pi/3$，再平移(2,0).

w_3，w_4 也可用三点确定一个线性映射来给出. w_3 分别映(0,0)，(0,3)和(3,0)为(1,0)，$(1-\sqrt{3}/2, 1/2)$和$(3/2, \sqrt{3}/2)$，w_4 分别映(0,0)，(0,3)和(3,3)为$(3/2, \sqrt{3}/2)$，(2,0)和$(2+\sqrt{2}/2, 1/2)$.

第三章　欧氏几何的公理化方法

欧几里得的《几何原本》，是人类精神文明的瑰宝.它对后世的影响，不仅限于几何学，甚至已经超出数学的范围.如何将已经获得的知识，用公理化的思想方法加以整理，使之成为一种演绎的科学体系，已经成为所有科学家，包括社会科学家所追求的崇高学术目标.本章，我们将介绍几何公理化方法的产生与发展.

第一节　公理化思想方法的内涵与价值

在第一章中，我们已经介绍过《几何原本》的公理化内容.现在，我们将它一般化，从方法论的层面进行论述.首先要问：什么是"公理"？什么是"公理方法"？

我们在《辞海》里可以看到这样的解释：

公理是"在一个系统中已为反复的实践所证实而被认为不需要证明的真理，可以作为证明中的论据.如等量加等量其和相等，整体大于部分都是公理."

公理化方法是"从某些基本概念和基本命题出发，依据特定的演绎规则，推导一系列的定理，从而构成一个演绎系统的方法."

在这一解释中，我们注意到公理化方法有以下几个方面需要讨论.

第一，关于公理的自明性.一般地说，公理之所以被人们普遍接受，是因为其陈述的事实是自然的、明白无误的，因而无须证明，不容置疑.正因为如此，公理成为人们展开科学体系的出发点，作为论证其他命题的依据.但是，后来发现，有些公理并非十分显然，例如欧氏几何中的平行公理，就不那么显然，以至人们企图去证明它.至于非欧几何中的关于平行线的公理，则完全和直观认识相悖，完全不是自明的.因此，现代人们选取某些命题作为公理，只是作为一种演绎推理的出发点.并非一定要自明，只要大家都能自然地接受就行.

第二，关于公理体系所依赖的"演绎推理"的规则.公理化方法的目标是从公理系出发，通过演绎推理得到命题.因此，推理的规则十分重要.通常使用的规则是逻辑方法.古希腊时代的推理，就是依据亚里士多德创立的形式逻辑规则（三段论等）进行演绎.后来欧多克斯还采用穷竭法处理具有无限性的推理过程，把比值为有理数的结论都推广到无理数.近代则采取更加严密的数理逻辑方法.因此，演绎推理的规则在不断发展，与时俱进.

特别地，在数理逻辑中还有不同的观点．一种意见是主张使用反证法，容许“存在性”的证明．例如，$\sqrt{2}$是无理数，N次代数方程在复数域有且只有N个根等命题，现在多半采用反证法加以证明．但是，持直觉主义数学哲学观点的另一种意见，则不予接受．他们认为反证法只说明了$\sqrt{2}$不是有理数，你不能正面地描述它．说N次代数方程必有N个复数根，只知道它们存在，却“构造”不出来，不知道“根”在哪里．这样的证明不算数．这种争论，在中学里一般不会发生，但是在当代的公理化方法研究中，却是一个核心课题．

第三，关于“公理化方法的目标是形成一个演绎的科学体系”．公理化方法是未表述一个科学体系服务的．知识体系已经存在了，我们不能随便拿一些命题作为公理．问题在于判断哪些命题是最基本的，可以作为推理论证的出发点．也就是说，选择哪些命题当作公理，是一个颇费思考的问题．近代的公理化方法，要求公理的选取必须符合以下的三条要求：

(1) 相容性(或称为协调性，无矛盾性) 即所选取的这些公理之间彼此不能互相矛盾．不然一个命题及其否定命题都可以从公理推出，那是逻辑所不容的．这是最基本的要求．

(2) 独立性 这要求公理系统中的公理数目，在保证所需要达到的目标的前提下，尽可能地减少，不容许公理系中出现多余的公理．

(3) 完备性 这是指确保从公理系能够导出所论数学某分支的全部命题，因此必要的命题不能省略．

一个公理系统如果能够满足以上三条，当然十分理想．但是，要做到这一点并非容易的事，甚至至今无法彻底实现．例如，要证明欧氏几何学的相容性就十分困难①．至于独立性的要求，也是很自然的．但是，在平面几何和立体几何的实际教学中，为了提高教学效率，我们往往故意多列一些公理，便于推理论证．至于欧氏几何的完备性，则更为复杂，超出了本书的范围．

最后，我们要谈谈公理化思想方法的作用．徐利治②归纳为以下四点：

(1) 这种方法具有分析、总结数学知识的作用．凡取得了公理化结构形式的数学，由于定理与命题均已按逻辑演绎关系串联起来，故使用起来也较方便．

(2) 公理化方法把一门数学的基础分析得清清楚楚，这就有利于比较各门数学的实质性异同，并能促使和推动新理论的创立．

---

① 迄今为止，我们只能给出一个相对的结果．其思考路线是：欧氏几何公理的相容性可以归结为自然数的皮亚诺公理系统的相容性，而自然数公理的相容性，又可归结为“集合论”公理的相容性．由于集合论的无矛盾性至今还没有解决．因此，就几何学的公理系统而言，只是相对于集合公理而言是“相容的”．这就是说，如果集合公理是相容的，那么欧氏几何公理也是相容的，无矛盾的．

② 徐利治．论数学方法学．济南：山东教育出版社，2002：95

(3) 数学公理化方法在科学方法学上有示范作用. 这种方法对现代理论力学及各门自然科学理论的表述方法都起到了积极的借鉴作用. 例如,19 世纪 40 年代波兰的 Banach 曾完成了理论力学的公理化;而物理学家亦把相对论表述为公理化形式…….

(4) 公理化方法所显示的形式的简洁性、条理性和结构的和谐性确实符合美学的要求,因而为数学活动中贯彻审美原则提供了范例.

公理化方法的发展,经历了以下四个时期:

1. 直观性公理化时期,以欧几里得的《几何原本》为代表;
2. 思辨性公理化时期,以非欧几何的发现为代表;
3. 形式主义公理化时期,以希尔伯特的《几何基础》为代表;
4. 结构主义公理化时期,以布尔巴基的《数学原本》为代表.

以下我们将分为四节,分别介绍这四个时期的公理化思想方法.

第二节　直观性公理化时期——《几何原本》

古希腊是实行"奴隶主民主政治"的国家. 虽然是少数人的民主,却逐渐萌发了"说服"、"证明"、"推理"等的理性思维精神. 早在公元前 7 世纪,泰勒斯(公元前 625—前 547),就开始了几何证明活动,例如证明对顶角相等这样的命题. 毕达哥拉斯(公元前 580—前 500)学派,积累了大量的几何知识,包括大家熟知的、我国称之为"勾股定理"的著名结果. 此后的柏拉图(公元前 427—前 347)和欧多克斯(约公元前 408—前 347)大量采用以公理为论据的几何证明方法.

大约在公元前 3 世纪,希腊的哲学家和逻辑学家亚里士多德(Aristotle,公元前 384—前 322)总结了前人积累起来的逻辑知识,以演绎证明的科学(主要是数学)为实例,把完全三段论作为公理,由此推导出别的所有三段论法(共分为 19 个格式),因此,可以认为亚里士多德在历史上提出了第一个成文的公理系统.

后期的古希腊文明中心,在亚历山大里亚(现在属于埃及). 欧几里得的生卒年月不详,大约活动在公元前 300 到公元前 275 这段时间. 他是柏拉图的学生,在亚历山大城进行教学和研究. 他最重要的科学工作是系统地整理了古希腊的几何学知识,写成《几何原本》,成为人类历史上第一部完整的公理化的著作.

《几何原本》在 1607 年由利玛窦(1552—1610)和徐光启(1562—1633)将前 6 卷译成中文. 徐光启对这部著作的高度评价至今仍有现实意义. 他说:"此书有四不必:不必疑,不必揣,不必试,不必改. 有四不得:欲脱之不可得,欲驳之不可

得,欲减之不可得,欲前后更之不可得.有三至三能:似至晦实至明,故能以其明明他人之至晦;似至繁实至简,故能以其简简他人之繁;似至难实至易,故能以其易易人之难.易生于简,简生于明,综其妙在明而已".学习欧氏几何,能够有这样的体会,可以说得到了它的精华.杨振宁认为,《几何原本》的翻译是中国近代数学的开始.

1990年,兰纪正、朱恩宽用白话文翻译《几何原本》,由陕西科学技术出版社出版.

这里,我们简单地介绍《几何原本》的主要内容.

全书共分十三卷,主要内容如下:

《几何原本》第一卷给出全书最初的23个定义、5个公设和5个公理:

定义①

定义(1)—(7)参见第一章第二节.

(8) 平面上的角是在一个平面上的两条相交直线相互的倾斜度;

(9) 当形成一角的两线是一直线时,这个角叫做平角;

定义(10)—(22)是关于直角和垂线、钝角和锐角、圆、圆的中心、直线形、三角形、四边形、等边三角形、等腰三角形、不等边三角形、正方形、直角三角形、菱形等的定义.最后一个定义是:

(23) 平行直线是在同一平面内,而且往两个方向无限延长后在两个方向都不会相交的直线.

公设 参见第一章第二节.

公理 参见第一章第二节.

《几何原本》的这一卷是从定义、公设、公理开始的,接着用48个命题讨论了关于直线和由直线构成的平面图形.分成三组:第一组(命题1—26)主要讲三角形和垂线;第二组(命题27—32)主要讲平行线理论;第三组(命题33—48)通过比较面积讲平行四边形、三角形和正方形.

欧几里得证明方法思路清晰,整个证明建立在严密的公理化基础上,使几何学成为真正的科学.

《几何原本》中的命题有两种类型,一类是定理,根据假定、公理、公设和定义利用逻辑推理得出结论.另一类是作图题,由已知的对象找出或作出所求的对象.第二卷中介绍这方面的命题.

第二卷讨论线段计算,包括黄金分割定理,共14个命题.

第三卷主要讨论有关圆的一些理论和有关命题,共有37个命题.命题1到

---

① 这里关于点、线、面的定义,是从经验得来的,请对比希尔伯特的公理系.

命题 15 讲圆心、弦、直径以及两圆的相交，相切；命题 16 到命题 19 讲切线；命题 20 到命题 24 讲割线；命题 35 到命题 37 讲圆幂. 命题 16 最引人注目，它讨论了一种特殊的角——“牛头角”.

命题 16　在圆的直径的端点所作直径的垂线必在圆外，不能有其他的直线插在这垂线与圆之间，而且半圆的角大于锐角，其余的角小于任意锐角.

命题指出：切线 TA 与弧 ACE 之间的夹角(图3-1)即牛头角小于直线的任何锐角，但它的值并不是零. 欧几里得很少谈到曲线之间的夹角，通常讨论的都是直线之间的夹角.

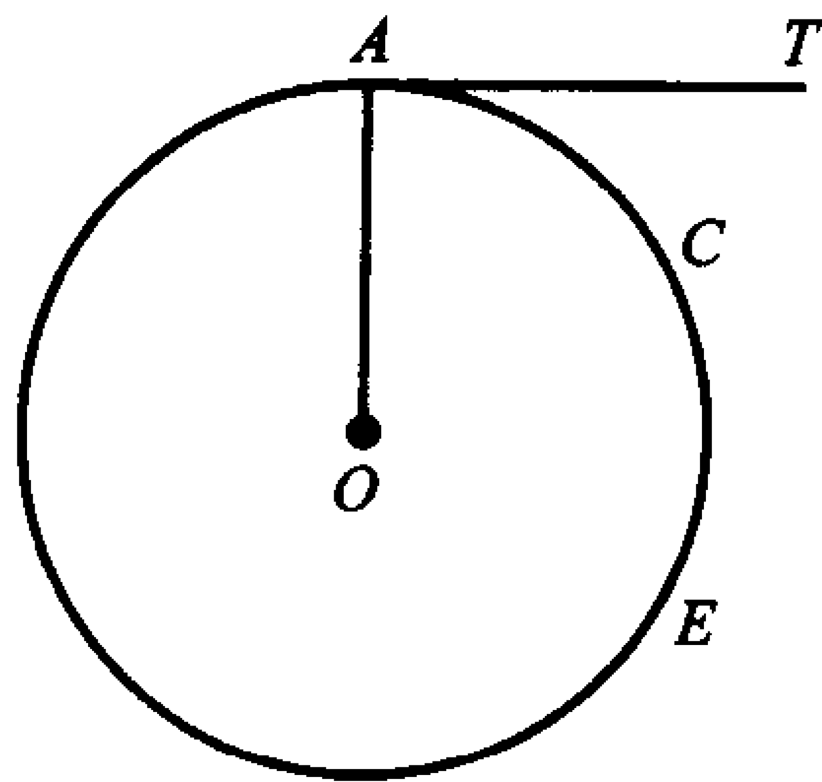


图 3-1

第四卷讨论圆内接、外切多边形，包括正五边形、正六边形、正十五边形的作法，共 16 个命题.

第五卷是《几何原本》中比较精彩的一卷，讲比例理论. 在欧多克斯以前也讲比例的理论，但讲的是可通约量的比例理论，而根据欧多克斯比例理论编写的第五卷，把比例推广到不可通约量. 第五卷共有 18 个定义，讨论了量的比的相等和不等；25 个命题，命题给出比例的一些性质，现作简单介绍如下：

定义

(1) 小的量能量尽大的量时，小的量称为大的量的部分. 这里“部分”是指若干分之一.

(2) 大的量能被小的量量尽时，大的量称为小的量的倍数. 这里倍数指整数倍数.

(3) 比是两个同类量的大小之间的一种关系.

(4) 可比的两个量，如果一个量的倍数大于另一个量，那么说，这两个量彼此之间构成了比.

注　定义给出了什么样的两个量可以有一个比，这两个量必须是同类量，这两个量不能有无穷小或无穷大的量，尽管在这一卷中，一开始就提到量，但没有对量下定义.

(5) 四个量形成第一个量与第二个量之比以及第三个量与第四个量之比. 我们说这两个比是相同的：如果取第一、第三两个量的任何相同的倍数，取第二、四两个量的任何相同的倍数后，从头两个量的倍数之间大于、等于或小于的关系，可以推出后两个量的倍数之间的相应关系.

注　这个定义是说有 a、b、c、d 四个量，m、n 是任意的整数，如果下列关系成立：

对 $ma<nb$，必有 $mc<nd$；

对 $ma=nb$，必有 $mc=nd$；

对 $ma>nb$，必有 $mc>nd$.

则称 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$. 定义(5)为量的比例的代数性质打下基础，是一个关键性定义.

(6) 有等比的量称为成比例的量.

(7) 如果第一量的倍数大于第二量的倍数，而第三量的倍数不大于第四量的倍数，那么第一量，第二量之比大于第三，第四量之比.

注　这个定义说，只要有一个 m，一个 n 使得 $ma>nb$，而 $mc\leqslant nd$，则 $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$，因此，对于一个不可通约的比 $\frac{a}{b}$，可将它置于两个比之间，即一个比大于 $\frac{a}{b}$，另一个比小于 $\frac{a}{b}$.

(8) 一个比至少要有三项 $\left(\text{指}\frac{a}{b}=\frac{b}{c}\right)$.

(9) 当三个量成比例时，我们说第一量与第三量之比是第一量与第二量的二次比. 即是说，若 $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$，那么 $\frac{a}{c}=\frac{a^2}{b^2}$.

(10) 四个量成连比时，第一量与第四量之比称为第一量与第二量的三重比，依次类推.

即是说，若 $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}$，那么 $\frac{a}{b}=\frac{a^3}{b^3}$.

注　定义(11)到定义(18)，定义了相应的一些量：交比、反比、分比、合分比等，这里指从 $\frac{a}{b}$ 形成 $\frac{a+b}{b}$，$\frac{a-b}{b}$ 等一些比.

在定义以后，给出了关于量和量之比的 25 个命题，证明是用文字叙述的，欧几里得为了帮助读者理解命题和证明的意义，用线段来说明量.

命题 1　任意多个量，分别是同样多个量的相同倍数，那么不管那些个量的倍数是多少，它们总起来也有那么多的倍数.

即是说 $m(a+b+c+\cdots)=ma+mb+mc+\cdots$. 以下命题用现代记号表示就是：

命题 4　若 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，则 $\frac{ma}{mb}=\frac{mc}{md}$.

命题 11　若 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，则 $\frac{ma}{nb}=\frac{mc}{nd}$.

命题 12　若 $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$，则 $\frac{a}{b}=\frac{a+c+e}{b+d+f}$.

命题 17　若$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，则$\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}$.

命题 18　若$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$，则$\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$.

第六卷讨论相似多边形及比例，共 33 个命题.

第七、八、九三卷是数论.

第十卷讨论不可公度量的分类，包括与整数的开方有关的几何运算，共 117 个命题（或 115 个命题）.

第十一、十二、十三卷讨论立体几何，包括直线、平面位置，多面角的平面角，棱柱体积，相似体体积之比，以及讨论正多面体有且只有五类等.

从这个简单介绍可以看到，目前属于初等几何学的内容和方法，基本上都已包括在《几何原本》中了. 它所以能在两千多年的时间中被长期公认为几何学的标准教科书，就在于它的相当严密的体系和丰富的内容，欧几里得的工作是伟大的，他是第一个试图建立几何学基础（即提出一些定义和少数公设、公理作为后面逻辑推理的依据和出发点）的数学家. 不过，由于历史的局限性，《几何原本》并没有彻底解决建立几何基础的问题，《几何原本》的逻辑体系不是严密的.

习　题　3.2

1. 《几何原本》的主要内容是什么？
2. 对《几何原本》的缺陷你是怎样认识的？

第三节　思辨性的公理化时期——非欧几何

《几何原本》的公理系统尽管具有伟大的历史意义，成为表述科学真理的典范，但是毕竟处于初创时期，有许多不足之处.

早在古希腊时期，数学大家阿基米德（Archimedes，公元前 287—前 212）就指出，在几何作图时，对任意两条线段 $a,b,a<b$，若用 a 的长度在 b 上依次截取线段，必定在 n 次之后，能够超过 b 的长度，即 $na>b$. 这就是著名的阿基米德公理。它不含在《几何原本》的公理体系之中. 因此，《几何原本》中的某些作图缺乏公理依据，即其公理体系是不完备的.

在欧洲漫漫的中世纪黑夜里，《几何原本》几乎失传. 直到文艺复兴以后，《几何原本》的公理体系才重新被人们研究，一些不足之处也陆续发现出来.

欧几里得试图对一切概念都给予定义，但他在最初的几个定义中用了一些

未经定义的概念，如“部分”、“界限”、“长度”和“宽度”等，这些概念意义模糊不清，缺乏逻辑性. 起初的几个定义中的概念只是形象的抽象描述.

在公理、公设的作用方面，如果把它们作为几何学严格的逻辑推理的根据，所列的五个公设和五个公理是不够的，在证明某些定理时，欧几里得不得不(或明或暗地)采用借助图形直觉与默认的方法. 例如

《几何原本》第一卷第 1 个命题：“在一定直线上作等边三角形”.

作法：已知直线(即线段)AB，作$\odot(A,AB)$，再作$\odot(B,AB)$，设两圆交于C，连结AC、BC，就得等边$\triangle ABC$(图略).

欧几里得在这里是据直观，假定这样的两圆必定相交，可是根据定义、公理及公设是得不出这个断语的. 事实上，交点C的存在必须以圆的连续性为前提，而他的公理中没有一处讲到连续性(此处，事实上暗地导入了新的公理).

《几何原本》第一卷第 4 个命题：“若一个三角形两边和其夹角相应地等于另一个三角形的两边和其夹角，则这两个三角形全等”.

证明方法是把一个三角形叠合到另一个三角形上去，但是，要使两图形能够叠合，必须求助于运动. 运动中图形会不会变形？《几何原本》中既没有明确“运动”的概念，也没有相应的公理，不得不凭直觉假定运动使图形的长度和角度都保持不变.

《几何原本》中也利用了“介于”的概念，如“直线上一点介于另两点之间”、“在直线同一侧的两点”、“在直线不同侧的两点”，但欧几里得并没有把这些概念列入公理系统(缺乏顺序公理)，因此，对于这些语句的意义也只能依靠图形的直观来理解，证明定理用到它们时，也只得利用图形的直觉来说明.

基于上述缺陷，学习欧几里得几何的学生可能发生因错误作图而得出错误结论的危险. 大量的所谓几何诡辩就是这样产生的. 诡辩结论都有形式上正确的证明，但都基于错误的几何作图，即与介于性公理相矛盾，如大家较熟知的“每个三角形都是等腰的”诡辩结论的证明即如此.

综上所述，欧几里得的《几何原本》中的公理系统作为几何学的逻辑推理的基础是不够严密的. 应该怎样修改、补充《几何原本》中的定义、公理才能使几何学成为逻辑上完美无缺的科学呢？怎样建立几何学的牢固的逻辑基础呢？这个问题是两千年以来的几何学家研究的重要课题，几乎从《几何原本》写成之日就开始了. 数学家从两方面进行研究，一方面是增加或改换公理，另一方面是试证第五公设，前者促进了几何基础的严密化，后者导致了非欧几何的产生.

在改良欧几里得《几何原本》公理系统的漫长的岁月里，首先值得提到的应是古代希腊伟大的数学家、物理学家阿基米德，在其《论球和柱体》著作中提出了五个公理，其中第五个：“两条不等的线，两个不等的面，或两个不等的体，只要把

可比较的量中的小的扩大到适当的倍数，便会比大的那一个更大”．这条公理关于线段的叙述，便是现在所谓的著名的阿基米德公理：“小的线段 a 恒可以增大这样多的整数倍，使它越过大的 b，即存在正整数 h 使 $ha>b$”．此乃度量几何的不可缺少的几何根据．

中世纪的数学以有大量公理为其特点，数学家们都把一连串的空间性质写成公理，这些公理的历史作用在于，它们促进了现代公理化思想方法的建立．在17、18世纪，萨开里(Saccheri)、Lambert、Legendre曾经反复地通过不同方式企图证明第五公设是定理，即设法用其他简单的公理予以证明．他们多半使用反证法，从第五公设的否定命题出发，如果能找出矛盾，就得到证明．但是费尽心机，终无结果．

19世纪中叶，非欧几何诞生的时机终于成熟了．人类的理性精神和思辩能力，催生了非欧几何．首先是大数学家高斯(Gauss，1777—1855)发现了第五公设的否定命题和其他公理是协调的，即无矛盾的．匈牙利的大学生J·波尔约(Bolyai，1802—1860)也独立地在1832年发现了非欧几何．但是，只有俄罗斯的罗巴切夫斯基(1792—1856)在1826年发表“虚几何学”的演讲，但是没有得到承认．1829年，他把自己的创见发表在《喀山通报》上．这是世界上最早的非欧几何文献．

罗巴切夫斯基用“过给定直线外一点，存在着至少两条直线与给定直线不相交”来替代平行公理，并由这套新的体系演绎出一套与欧氏几何迥然不同的命题体系，但却并没有导致任何矛盾．当时的数学界不能接受这样奇怪的几何，不断遭到嘲讽和打击．但是罗巴切夫斯基毫不动摇，继续用法文、德文、俄文陆续发表著作．他追求真理、坚持真理、宣传真理的勇敢作为，绝对是人类崇尚理性的典范．可以作为对照的是，虽然高斯发现了非欧几何，但因为和传统的观念相悖，没能公开发表．

非欧几何虽然在逻辑上是成立的．但是要让人们真正信服这种纯理性的几何体系，还是应该将这种“虚”的几何学真正地构造出来，也就是要提供这种“虚”几何的现实模型．在19世纪70年代，相继提出了许多“实在”的非欧几何模型．这些模型都能将非欧几何学在人们已经习惯的欧氏空间中实现出来．

下面用法国大数学家庞加莱(Poincaré，1854—1912)提出的上半平面模型作为例子来阐述非欧平面几何．在庞加莱模型中，它的基本概念可作如下的理解：

“点”相当于上半(开)平面中的点；

“直线”相当于“上半平面中与 x 轴垂直的直线，或上半平面中以 a 轴上的点为圆心的上半圆周”；

“点 P 属于(或结合)直线 l”相当于“上半平面中代表 P 的那一个点属于代表直线 l 的那条与 x 轴垂直的直线，或以 a 轴上的点为圆心的上半圆周”；

“点 B 在另两点 A，C 之间”相当于“A，B，C 三点属于上半平面中同一条与 a

轴垂直的直线，或属于上半平面中同一个以 a 轴上的点为圆心的上半圆周上，而且排列的次序是依次为 A,B,C”.

“两线段合同”相当于“利用一系列关于与 a 轴垂直的直线的对称，或关于以 a 轴上的点为圆心的半圆的反演后能将一线段变至另一线段”.

“两角合同”相当于“利用一系列关于与 a 轴垂直的直线的对称，或关于以 a 轴上的点为圆心的半圆的反演后能将一角变至另一角”.

可以验证这些基本概念是服从结合公理、顺序公理、合同公理、连续公理所规定的约束，而且此模型满足非欧几何的“平行公理”，即“过给定直线外的一点，可作至少两条与给定直线不相交的直线.”

如图 3 - 2 所示，过罗氏平面上任一罗氏直线 l 外的一点 P，确实可以作出两条罗氏直线与 l 平行. 这里要注意的一点是欧氏直线 a 上的点不是罗氏系统的几何元素，故两个半圆相交于直线 a 上某一点则视为相交于无穷远点，而它们在有穷范围内永不相交. 这就实现了罗巴切夫斯基的虚几何.

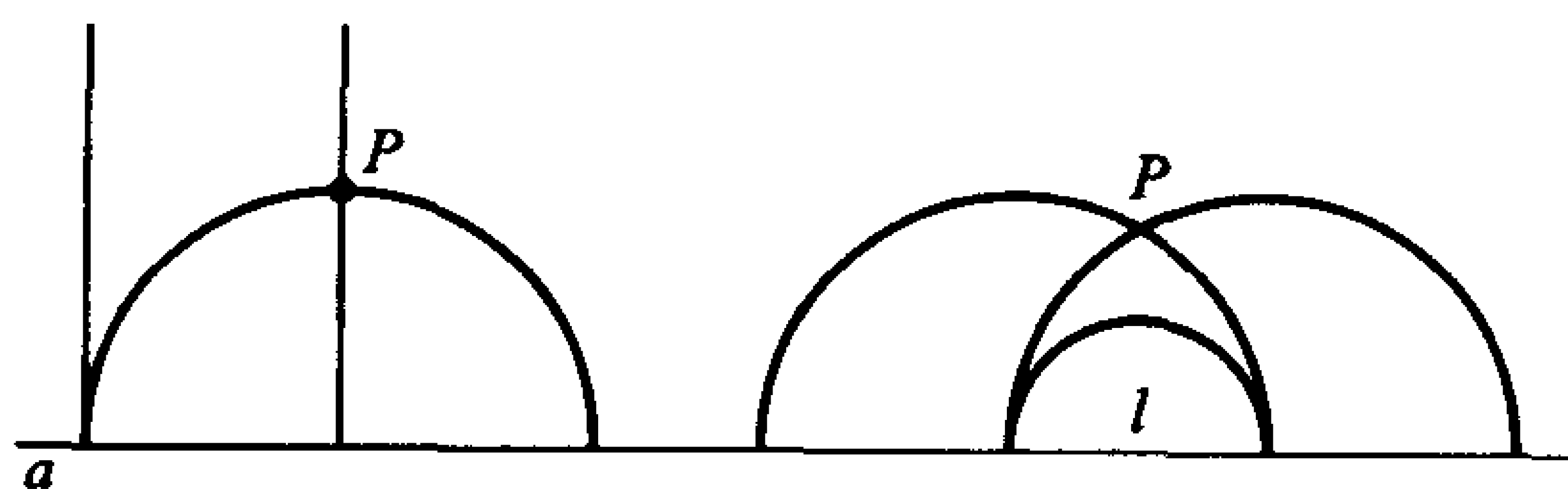


图 3 - 2

由此模型，我们还可以验证罗氏几何在一定意义下的相容性. 现在假如如果罗氏系统在今后的展开中出现了正、反两个互相矛盾的命题，则只要按如上规定的几何元素间的对应名称进行翻译，即立刻成为互相矛盾的两个欧氏几何定理. 从而欧氏几何系统也就自相矛盾了. 因此，我们可以说，如果欧氏几何没有矛盾，那么罗氏几何也没有矛盾.

通过模型，人们终于接受了非欧几何.

我们把 17—19 世纪人们对公理化方法的研究称为“思辨性”的时期. 这是因为这时的公理化虽然仍旧保持了一定的直观成分，还使用点线面这样的几何形象，但是已经进入到理性思辨的领域，罗氏几何中的点、线，以及它们之间的关系，需要通过思辨才能理解. 此外，公理可以和自己的直观不一致，甚至违背. 这也把公理化方法带进思辨的领域. 人类理性思维的能力进入了新的历史阶段.

第四节 形式主义的公理化时期——希尔伯特的《几何基础》

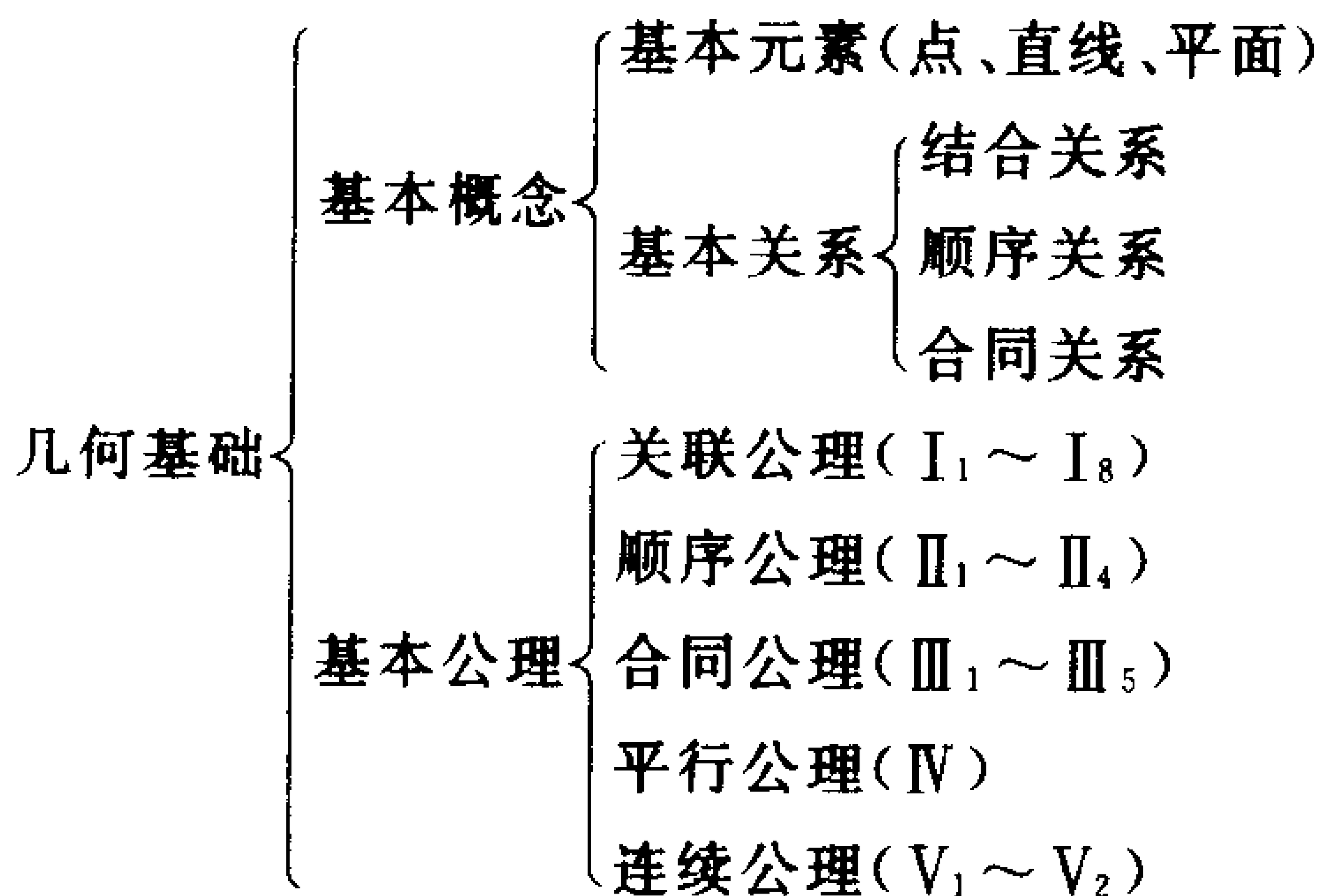
第五公设的试证导致发现非欧几何而引起的几何学上的革命，也促进了几何基础问题的研究.

非欧几何的诞生，使得人们对公理化方法更加关注，思考益深. 如前所述，欧氏《几何原本》中的公理体系有许多缺陷. 如何将它修改完善，成为一个值得研究的重大数学课题.

1898 年，数学大师 D · 希尔伯特的著作《几何基础》出版. 这标志着欧氏几何的完全严密化. 希尔伯特工作的核心是形式主义哲学观念. 在他看来，一门就是一个形式系统，即一个符号系统. 数学应当看作一种由公理出发进行推理的纯粹的符号游戏，不过在推理游戏中必须保证推导不出矛盾.

这样一来，欧氏几何可以看作是一些对象按一定规则推导出来的一堆命题，其间不会发生矛盾. 点、线、面这样的对象并没有实质性的意义，只要满足既定的一些公理所规定的关系，把它称为“桌子、椅子、啤酒瓶”也行. 不论什么对象，只要服从相同的形式规则，它们就构成同样的数学. 也就是说，重要的是“形式”，与对象的实质无关. 这就是“形式主义”一词的来源. 形式主义的数学观忽视数学与现实世界的联系，并不符合数学发展的实际. 但是，它在创立数理逻辑学科，推动计算机科学的发展上有重大价值. 实际上，计算机当然不能理解“实质”性的对象，只是按照人们的需要能够从事形式上的运算而已.

以下是希尔伯特在《几何基础》中给出的公理体系.



我们再次指出：其中的基本元素：点、线、平面，完全不加任何实质性的定义. 它们来自直观，高于直观，以至于可以完全脱离直观，代之以任何其他的对象，只要这些对象“形式”上满足所有的基本关系和基本公理.

以上的公理体系中，把平行公理去掉，就构成“绝对几何”的公理系. 绝对几何加上“平行公理”，构成欧氏几何，加上平行公理的否定命题，就构成非欧几何.

现在，我们把希尔伯特的公理系统完整地写出来.

希尔伯特在《几何基础》中先取定三个基本对象：点、直线和平面，五个基本关系：两个结合关系，叙述为“点与直线结合”，“点与平面结合”，也就是日常说的“点在直线上”、“点在平面上”或“直线通过点”、“平面通过点”；一个顺序关系，叙

述为“一点在另两点之间”；两个合同关系，叙述为“线段与线段合同”、“角与角合同”(线段与角另有定义). 同时逐步地提出五组公理共二十条，它们是：结合公理(8 条)、顺序公理(4 条)、合同公理(5 条)、连续公理(2 条)、平行公理(1 条). 下面具体介绍并展开一点讨论.

第一组 结合公理 Ⅰ(又称关联公理或从属公理)

I_1 对于两个不同的点，恒有一直线结合(通过)其中的每个点；

I_2 对于两个不同的点，至多有一条直线结合其中的每个点；

$I_{3.1}$ 每直线上至少有两个(不同的)点；

$I_{3.2}$ 至少有三点不在一直线上；

$I_{4.1}$ 对于不在一直线上的三点，恒有一平面通过它们中的每个点；

$I_{4.2}$ 每平面上至少有一个点；

I_5 对于不在一直线上的三个点，至多有一平面通过它们中的每个点；

I_6 如果直线 a 上的两个点在平面 α 上，则 a 的每个点在 α 上；

I_7 如果两平面有一公共点，则至少有另一公共点；

I_8 至少有四个点不在同一平面上.

由上我们可以看到：① 结合公理保证了直线、平面的存在，其中 $I_{3.2}$ 和 I_8 保证了点的存在；I_1 和 $I_{3.2}$ 保证了直线的存在；$I_{4.1}$ 和 I_8 保证了平面的存在. $I_{3.1}$、$I_{4.1}$、$I_{4.2}$、I_7 等又说明在怎样的条件下存在什么，称之为“条件存在公理”.

公理 I_2、I_5、I_6 不涉及存在问题.

② 结合公理刻画了点、直线、平面间的结合关系. I_1—I_3 属于点和直线的结合关系，称为平面结合公理；I_4—I_8 称为空间结合公理.

③ 结合公理(主要是 I_7、I_8)保证了所研究的空间是三维的.

“直线和平面结合关系”不是基本概念，但可定义如下：

定义 1 若直线上的每个点都在平面 α 上，则称直线 a 和平面 α 互相结合(或 a 在 α 上).

结合公理可以有如下推论：

定理 1 两直线至多有一个公共点；一平面和不在其上的一直线至多有一个公共点；两个平面或者既无公共点又无公共直线，或者有一条公共直线，它们所有的公共点都在这直线上.

定理 2 过不共线三点恰有一个平面；过一直线及不在其上的一点恰有一平面；过有公共点的两直线恰有一平面.

定理 3 每个平面上至少有三个不在同一条直线上的点.

如上结合公理是中学平面几何与立体几何中有关点、直线、平面间结合关系的理论基础. 其中 I_1，I_2，$I_{4.1}$，I_5，I_6 都反映在教材中了；关于两个平面的结合

关系,传统中学几何教材是采用了结合公理的推论——定理 1 中的部分结论;公理组中的 I_3, $\mathrm{I}_{4.2}$, I_8在传统中学教材论证中,都作为直观或默认的事实.

第二组　顺序公理Ⅱ(又称介于公理)

II_1　若点 B 在点 A 和 C 之间,则 A、B、C 是直线上的不同三点,而且 B 也在 C 和 A 之间. 简记为 $A\dot{B}C \Rightarrow C\dot{B}A$.

II_2　对于任意两点 A 和 B,直线 AB 上至少有一点 C,使得 B 在 A 和 C 之间.

II_3　在一直线上的任意三个点里,至多有一点在其余两点之间.

为介绍公理II_4,先给出如下定义.

定义 2　直线上无序两点 A、B 间的集合叫线段,记为 AB 或 BA,A 和 B 之间的点叫线段 AB 的内点,或线段 AB 上的点,A 和 B 之间所有点的集合叫做一开线段,记为(AB),A、B 各叫线段 AB 或(AB)的端点,直线 AB 上异于 A、B 且不属于(AB)的点叫线段 AB 或(AB)外部的点.

定义 3　不共线的点 A、B、C 和三开线段(AB)、(BC)、(CA)的所有点的集合称为一三角形,记为$\triangle ABC$,A、B、C 称为该三角形的顶点,开线段(AB)、(BC)、(CA)各称为该三角形的边.

II_4(帕施 Pasch 公理)　设 A、B、C 不在同一直线上,直线在平面 ABC 上但不过 A、B、C 中的任一点,若 a 过(AB)的一点,则它必过(AC)的一点或(BC)的一点.

帕施公理又可叙述为:与一三角形共面而不过其顶点的直线,若与三角形的一边相交,必与另一边相交.

由上我们可以看到:① 公理II_1—II_3是直线上点的顺序公理,也称为线性顺序公理,II_4是平面顺序公理;② II_2保证线段外部有点,II_3断言共线三点至多有一点在另两点之间. 但是,线段内部是否有点? 共线三点中是否必存在一点在另两点之间? 这些问题公理中没有直接回答,但答案是肯定的,它们的证明都必须用帕施公理.

顺序公理可以有如下推论:

定理 4　对于任意两点 A、C,直线 AC 上至少有一点 B 在 A、C 之间.(证略)

定理 5　在一直线上的三个点中,必有且只有一点在其余两点之间.(读者自证)

定理 6　直线 a 与$\triangle ABC$ 共面而不过其顶点,若 a 交其一边,则必交其另一边,但不得再交其第三边.(证略)

定理 7　A、B、C 共线,另一点 P 若在三开线段(AB)、(BC)、(CA)之一上,

则必在其二上，但不得再在其三上.

定理 8 设 A、B、C、D 为同一直线上的四点，则

(1) $A\dot{B}C$且$B\dot{C}D \Rightarrow A\dot{B}D$且$A\dot{C}D$；

(2) $A\dot{B}C$且$A\dot{C}D \Rightarrow A\dot{B}D$且$B\dot{C}D$；

(3) $A\dot{B}C$且$A\dot{B}D \Rightarrow A\dot{C}D$且$B\dot{C}D$或$A\dot{D}C$且$B\dot{D}C$.

定理 9 线段 AB 内部的点有无穷多个，线段 AB 外部的点有无穷多个.

定义 4 设 O、A、B 共线，若$A\dot{O}B$，则称 A、B 在这直线上点 O 的异侧；若 O 不在 A 和 B 之间，则称 A、B 在 O 的同侧.

定理 10(剖线定理) 直线 a 上任一点 O 把 a 上所有其余的点分成两类，使得点 O 在异类两点之间，而不在同类两点之间.(证略)

还有剖面定理、剖分空间定理、空间帕施定理等，此处均略. 下面再给出角的定义.

定义 5 两点 O、A 在直线 a 上，点 A 以及与点 A 在点 O 同侧的所有点的集合称做以 O 为原点(或端点)的一条射线，记作$\overrightarrow{OA}$.

定义 6 点 O 以及以 O 为原点的无序的两条不共线的射线 h、k 的集合称为角，点 O 称为角的顶点，射线 h、k 各称为角的边，记为$\angle(h,k)$或$\angle(k,h)$或$\angle O$.

还可以给出 n 角形、n 边形、半空间等定义.(略)

如上顺序公理在中学教材中没有引入，而是渗透其中的. 我们可以运用结合公理、顺序公理"居高临下"地理解中学教材. 例如，对于射线的定义在平面几何教材中是无法界定的，而由定义 4 则可理解这个概念的意义了；对于"线段可以向任意一方延伸"中的"延伸"的意义的揭示也是从 II_2 得到，II_2 保证了"延伸"的可能性；关于两线段、两角大小比较中的内、外部概念、半平面等概念在教材中仅作了直观描述，这些问题只有在 II_1—II_4 的基础上才可以从理论上予以严格叙述. 等等.

第三组 合同公理Ⅲ

距离大小、角的大小、迭合等许多概念要定义，必须引进新的基本概念——合同关系，并以"$\equiv$"记之.

合同关系中的二个基本关系受下述公理(5 条)制约：

III_1 设 A、B 是直线 a 上的两点，A'是同一或另一直线 a'上的一点，则在 a'上 A'的已知一侧恒有一点 B'，使线段 AB 合同于线段 $A'B'$，记为 $AB\equiv A'B'$.

III_2 若两线段(可以相同)都合同于第三线段，则这两线段也合同.

易证线段合同关系是等价关系，因此线段合同具有反身性、对称性、传递性.

III_3 开线段(AB)、(BC)均在直线 a 上而无公共点，开线段$(A'B')$、$(B'C')$

均在同一直线或另一直线 a' 上，亦无公共点，若 $AB\equiv A'B'$，$BC\equiv B'C'$ 则 $AC\equiv A'C'$.

$\mathrm{III}_{4.1}$　已知平面 α 上的一角 $\angle(h,k)$，平面 α' 的一直线 a' 的一侧，以及 a' 上以点 O' 为原点的一条射线 h'，则 α' 上恰有一射线 k'，使 $\angle(h,k)$ 合同于 $\angle(h',k')$ 且 k' 在 a' 的已知一侧，记为 $\angle(h,k)\equiv\angle(h',k')$.

$\mathrm{III}_{4.2}$　$\angle(h,k)\equiv\angle(h,k)$.

III_5（三角形合同公理）　对于两个三角形 ABC 和 $A'B'C'$，若 $AB\equiv A'B'$，$AC\equiv A'C'$，$\angle BAC\equiv\angle B'A'C'$，则 $\triangle ABC\equiv\triangle A'B'C'$.

由上我们可以看到：III_1 保证线段可移，但未保证移法唯一，但在 III_1—III_5 的条件下移法唯一；$\mathrm{III}_{4.1}$ 保证角的可移，且在所设条件下移法唯一；III_3 保证线段可加；III_5 把“线段合同”与“角合同”两个概念联系起来，是证明三角形合同的重要依据.

合同公理有如下推论：

定理 11（线段移法的唯一性）　III_1 中的点 B' 是唯一的.

类似地可推得三角形合同的边角边、角边角、边边边定理以及角合同的一系列定理.（略）

定理 12（减线定理）　设 $A\dot{B}C$，点 B'、C' 在直线 $A'B'$ 上点 A' 的同侧，且 $AB\equiv A'B'$，$AC\equiv A'C'$，则 $A'\dot{B'}C'$ 且 $BC\equiv B'C'$.（证略，留作练习）.

由此，便可讨论，两线段大小的比较.

定义 7　已知两线段 AB 及 $A'C'$，在 $\overrightarrow{A'C'}$ 上取点 B' 使 $AB\equiv A'B'$，若 $A'B'C'$，则称 AB 小于 $A'C'$，记为 $AB<A'C'$；若 $A'\dot{C'}B'$，则称 AB 大于 $A'C'$，记为 $AB>A'C'$.

定理 13　设 a、b、c 表示任意三线段，下列命题成立.

(1) $a>b\Leftrightarrow b<a$；

(2) $a\equiv b,a>b,a<b$ 恰有一个成立；

(3) $a<b,b<c$ 或 $a<b,b\equiv c$ 或 $a\equiv b,b<c\Rightarrow a<c$.

证明　(1) 可用定义 7 与定理 10 得证；

(2) 可用定义 7 及定理 5 得证；

(3) 可由定理 8 及定理 10 得证.

同样我们可以讨论角的大小比较并可证明：

定理 14（外角定理）　三角形的每个外角都大于其任意一个不相邻的内角.

推论 1　若共面的两直线被第三直线截得相等的同位角，则此两直线不相交.

推论 2 通过已知直线外一已知点至少可引一直线与已知直线共面而不相交.

还可推得三角形的角边关系结论、三角形合同的角角边、边边角定理及有关角、垂线、角平分线的一系列定理等.

注意,我们这里是直接比较两线段的大小,而并非比较它们的长度,这是因为到目前为止,还不能够证明每条线段都有长度,而只有引用了下面的连续公理之后,才可能做到这一点.

如上合同公理在中学教材中没有直接引入,但我们可以认为“合同的图形”就是“全等的图形”.教材中阐述全等时用到“运动”的概念,但在前述三组公理的基础上是可以定义“运动”的.在中学教材中有关“相等”、“全等”问题的论述中,在逻辑上是不严谨的,这只有在公理III_1—III_5之下才论述得严谨.

由前面三组公理可推导出立体几何中有关直线、垂线、面角的一系列定理.

第四组 连续公理Ⅳ

IV_1(阿基米德公理) 设AB和CD是任意的两条线段,则在$\overrightarrow{AB}$上存在着有限多个点$A_1,A_2,\cdots,A_n$,使得A_1在A和A_2之间,A_2在A_1和A_3之间,……,A_{n-1}在A_{n-2}和B之间,B在A_{n-1}和A_n之间,并且线段$AA_1,A_1A_2,\cdots,A_{n-1}A_n$都合同于线段$CD$.

IV_2(直线完备性公理) 直线上的点所成的点集,连同其顺序关系和合同关系,不能再行扩充,使得扩充后,仍满足公理Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ和IV_1.

连续公理都是条件存在公理,通常称为测量公理.它们是使任意的线段能够由测量得长度的理论基础.

在前面三组公理的基础上,与IV_1等价的有戴德金命题:

设线段AB及其内部的所有点能被分为两类,且具有下列性质:

① 每点恰属于一类,A属第一类,B属第二类;

② 第一类中异于A的每个点,在A和每个第二类点之间.

则必存在一点C,使A、C间的点都属第一类,而C、B间的点都属第二类,点C称为戴德金分割点或界点,这种分类称为一个戴德金分划.

连续公理有如下推论:

定理 15 如果选定了长度单位OO',则每条线段AB有唯一的一个长度$d(AB)$.

定理 16 对于任何给定的正实数a,在给定单位长度后,则存在一线段,它的长度等于a.

定义了角的测量单位和角度后,有

定理 17 取定一角度单位,每角$\angle(h,k)$必有一个且只有一个度$\mu(h,k)$.

定理 18　取定一角度单位后，若直角的角度是 ω，则任一数 $\alpha(0<\alpha<2\omega)$，总对应着一个角 $\angle(h,k)$，使 $\mu(h,k)=\alpha$.

还可推得直线的连续性命题、直线交圆命题、圆交圆命题.

对于中学几何来说，连续公理是建立线段和角等图形度量的基础，是几何作图理论的基础，是建立坐标系的理论基础.

以公理Ⅰ—Ⅳ为基础建立起来的几何叫做绝对几何.

第五组　平行公理Ⅴ

Ⅴ(欧氏平行公理)　对于任何直线 a 和不在其上的任何点 A，至多有一直线过 A 且与 a 共面而不和 a 相交.

定义 8　共面而不相交的二直线 a 和 b 称为平行线，记为 $a /\!/ b$，若两线段所在的直线平行，则称两线段平行.

公理Ⅴ并不保证平行线存在，平行线的存在性是在公理Ⅰ—Ⅲ的基础上，由定理 14 的推论 1 和推论 2 保证.

平行线的性质，则必须在公理Ⅰ—Ⅴ的基础上才能推出(定理略).

公理Ⅴ有很多等价命题，下略作介绍. 此时，我们应明确，在等价概念里，公理基础 Σ 很重要，两个命题 A、B 关于 Σ 等价，却可以关于 Σ' 不等价，凡要证明两命题 A、B 在 Σ 基础上等价，必须证明它们在 Σ 的基础上能够互推才行.

可以证明，公理Ⅴ在 $\Sigma=\{$Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ$\}$上与下列诸命题均是等价的①.

命题 P_1:"共面不交的两直线被第三直线所截成的同位角相等".

命题 P_2:"欧氏第五公设".

命题 P_3:在一平面上，一直线的垂线和斜线必相交.

命题 P_4:过不共线的三点恒有一圆.

命题 P_5:三角形的三高线共点.

命题 P_6:过任何角内一点，必可引直线与此角的两边都相交.

在 $\Sigma=\{$Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ$\}$上下列命题均与Ⅴ等价.

命题 P_7:任何三角形的角和等于 π.

命题 P_8:有两个三角形其三对对应角合同而本身不合同.

命题 P_9:在一平面上有一锐角，其一边之垂线必与另一边相交.

平行公理还与萨氏四边形的上底等于下底、三角形的中位线定理、勾股定理等等价.

至此，我们将《几何基础》中的几何公理系统介绍完了，值得指出的是，我们这里将连续公理与平行公理前后调换了一下顺序，目的是为了一些叙述的方便.

---

① 胡杞，周香荔. 初等几何研究基础教程. 北京：北京师范大学出版社，1996

习　题　3.4

1.《几何基础》中的基本关系有哪些?

2.《几何基础》中公理有哪几组?

第五节　结构主义的公理化时期——布尔巴基的《数学原本》

随着人们对公理化思想方法的认识更加深刻,运用也更加广泛.如前所述,公理化方法的优越性之一是"整理数学知识".正如欧几里得整理古希腊的几何知识一样,许多数学分支也应该可以用公理化方法加以整理.于是,在19世纪与20世纪之交,除了希尔伯特建立了严密的几何公理之外,"数系"也进行了严密的公理化.皮亚诺(Peano,1858—1932)建立了自然数公理,戴德金(Dedekind,1831—1916)建立了"实数公理".由于集合论的诞生,策梅洛(Zermelo,1871—1953)和弗伦克尔(Fraenkel,1891—1965)创立了集合公理.豪斯多夫(Hausdorff,1868—1942)提出了拓扑空间的公理化定义.勒贝格(Lebesgue,1875—1941)提出了可列可加的测度公理.1933年,苏联的柯尔莫哥洛夫(Kolmogoroff,1906—1885)用测度理论创建了概率的公理化定义.

公理化地定义一个对象,然后加以展开,形成一个数学分支,乃是一种常用的数学方法.例如"群论"就是从"群"的公理化定义展开的.

定义(群)　设G是非空集合,其上定义了二元运算"·".如果对于任意的$a,b,c\in\{G,\cdot\}$,满足:

(1) 结合律　$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$;

(2) 存在单位元e,使得$a\cdot e=e\cdot a=a$;

(3) 对G中每个元素a都存在逆元素a^{-1}:$a\cdot a^{-1}=a^{-1}\cdot a=e$.

则称G是群.

由这三条公理出发,加上其他进一步的要求,进行演绎推理,就形成了群论.

实际上,代数中的群、环、域、线性空间,拓扑学中的距离空间,紧空间;泛函分析中的"赋范空间"、"内积空间"、"巴拿赫空间"、"希尔伯特空间"等等都是这样展开的.这样的数学表述方法和研究方法,给人的感觉是清晰、严谨、准确,因而受到数学家的青睐,以至风行一时.

1930年代,法国的一批年轻的数学家,形成了法国的布尔巴基学派.他们认为只有用公理化方法建立起来的数学才是严密的数学,而当时的数学都不够严格.他们同时注意到,既然一个个的数学分支可以用公理化方法建立起来,那么整个数学是否能够全盘地公理化呢?他们决定做一次尝试.

首先，他们从最一般的集合论公理开始，然后在各种集合上增添各种结构，主要是代数结构、序结构和拓扑结构．通过这三种母结构的不断增加、组合和变化，形成一个个的有机关联的公理系统，最后希望把全部数学作为一个公理化的统一体．1939 年出版了第一卷《数学原本》，到 70 年代出版了约 40 卷．布尔巴基学派提倡的这种结构主义的数学思想方法，是公理化思想方法的现代发展．

但是，用公理化方法整理全部数学的愿望，布尔巴基学派只实现了一半．《数学原本》中确实涵盖了一大部分的数学．但是，许多数学却不能用结构来加以描述．例如“数论”，其结构很简单，就是整数系．所以《数学原本》没有数论的位置．但是其中的数学内涵和技巧，远远超出了“整数系”的结构．此外，有些数学结果成立的条件，往往是充分条件，找不到表示某种结构的“充要条件”．例如，曲面积分中的斯托克斯定理，就很难给出它成立的充要条件，谈不上使该定理成立的结构．

1970 年以后，布尔巴基学派停止了《数学原本》的出版．它的历史功绩也就此结束了．

虽然，用公理化方法包办一切的做法，遭到了失败．但是用公理法展示数学学科的势头并未削弱．相反，公理化方法的运用正在越出数学学科的范围．量子力学公理化了；数理经济学公理化了．公理化思想方法，还向许多领域渗透．例如，我国的宪法，相当于公理．其他的法律都是由宪法衍生出来的．

总之，由几何学研究创立的公理化思想方法，仍然具有强大的生命力．

第六节　张景中欧氏几何公理体系①

张景中提出了以面积度量关系为核心的欧氏几何公理体系，目的在于适应中学数学教育普及的需要．在这个系统中，所谓平面，是由一些名叫“点”的元素组成的集合．这些点之间的关系满足下面的诸公理．

以下，我们用大写拉丁字母，如 A,P,X 表示点．

公理Ⅰ(距离公理)　两点 A、B 决定一个距离 $|AB|$，$|AB|$ 是非负实数．$|AB|=|BA|$，且 $|AB|=0$ 当且仅当 $A=B$ 时成立．

公理Ⅱ(线段连续公理)　若 A、B 是不同的两点，则对任给的非负实数 r，有唯一的一个点 P，使得下列两条件同时成立，如图3－3．

① $|AP|=r$；

② 当 $r\leqslant|AB|$ 时有 $|AP|+|PB|=|AB|$，当 $r>|AB|$ 时有 $|AB|+|BP|=|AP|$．

① 这一节引摘自张景中院士著作《教育数学探索》．成都：四川教育出版社，1994：95—102

以下为了表达起来方便，引入线段、延长线、射线、直线等概念.

定义 1(线段的定义)　设 A、B 是任两个点. 一切满足条件 $|AP|+|PB|=|AB|$ 的点 P 组成的集合称为线段 AB(注意，线段 AB 和线段的长度 $|AB|$ 在不至于混淆时，都可以记作 AB.). 点 A、B 分别都叫做 AB 的端点. 当 $A=B$ 时，说线段 AB 退化为一点，如图 3-3，$r\leqslant|AB|$ 的情形.

定义 2(延长线的定义)　设 A、B 是不同的两点，一切满足条件 $|AB|+|BP|=|AP|$ 的点 P 组成的集合，叫做 AB(在 B 侧)的延长线. 一切满足条件 $|BA|+|AP|=|BP|$ 的点，叫做 BA(在 A 侧)的延长线，如图 3-4. 定义中写在括弧内的词可省略.

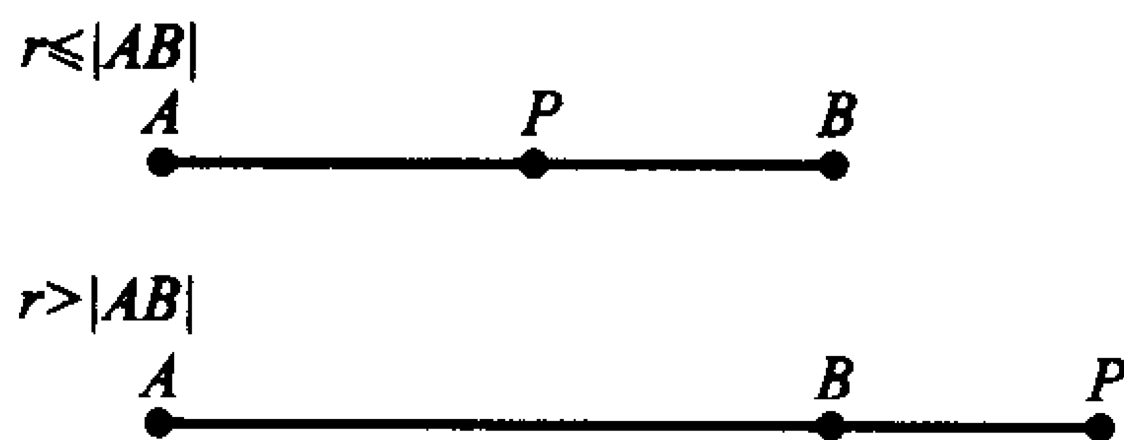


图 3-3

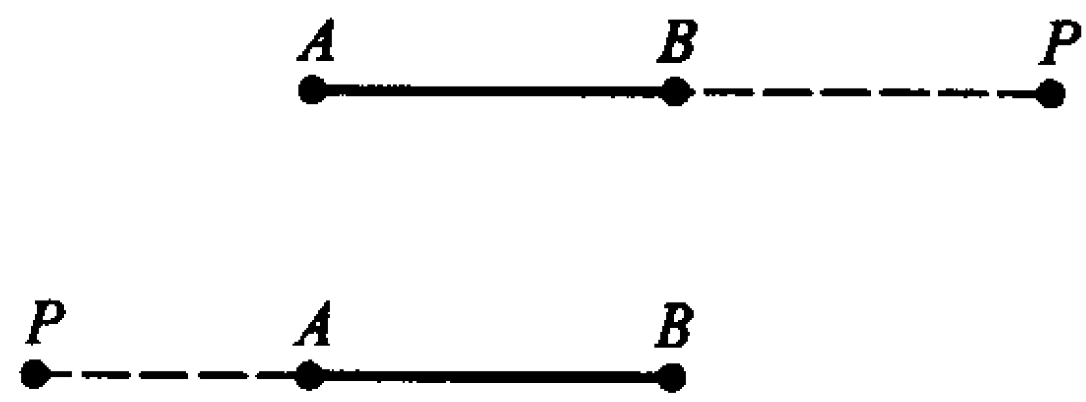


图 3-4

定义 3　设 A，B 是不同的两点. 线段 AB 和 AB(在 B 侧)的延长线的并集，叫做以 A 为端点，沿 AB 方向的射线.

定义 4　设 A、B 是不同的两点，AB 的延长线、BA 的延长线和 AB 之并，叫做由 AB 确定的一条直线. 也称为直线 AB.

换言之，点 P 在直线 AB 上的充要条件是下列三式之一成立

$$\begin{cases}(1)\ AP+PB=AB,\\(2)\ AB+BP=AP,\\(3)\ BA+AP=BP,\end{cases}\tag{3-1}$$

或者合起来说

$$(AB+AP-BP)(AB-AP+BP)(AB-AP-PB)=0.\tag{3-2}$$

下面继续叙述公理：

公理Ⅲ(面积公理)　三点 A、B、C 决定一个面积 $|\triangle ABC|$，$|\triangle ABC|$ 是一个非负实数. 且 $|\triangle ABC|=|\triangle ACB|=|\triangle BAC|=|\triangle BCA|=|\triangle CAB|=|\triangle CBA|$. 当 A、B、C 不在同一条直线上时，$|\triangle ABC|>0$.

公理Ⅳ(非退化公理)　平面上至少有三个点 A、B、C 使 $|\triangle ABC|>0$.

公理Ⅴ(线性公理)　若 A、B、C 三点在一直线上，$AB=\lambda AC$，P 是平面上任一点，则

$$|\triangle PAB|=\lambda|\triangle PAC|，\text{如图 3-5.}\tag{3-3}$$

公理Ⅴ是这个公理系统中一条主要公理，即基本命题. 它实际上是说：“同高三角形面积之比等于底之比”. 但表面上，既没有提到高，也没有提到三角形. 事

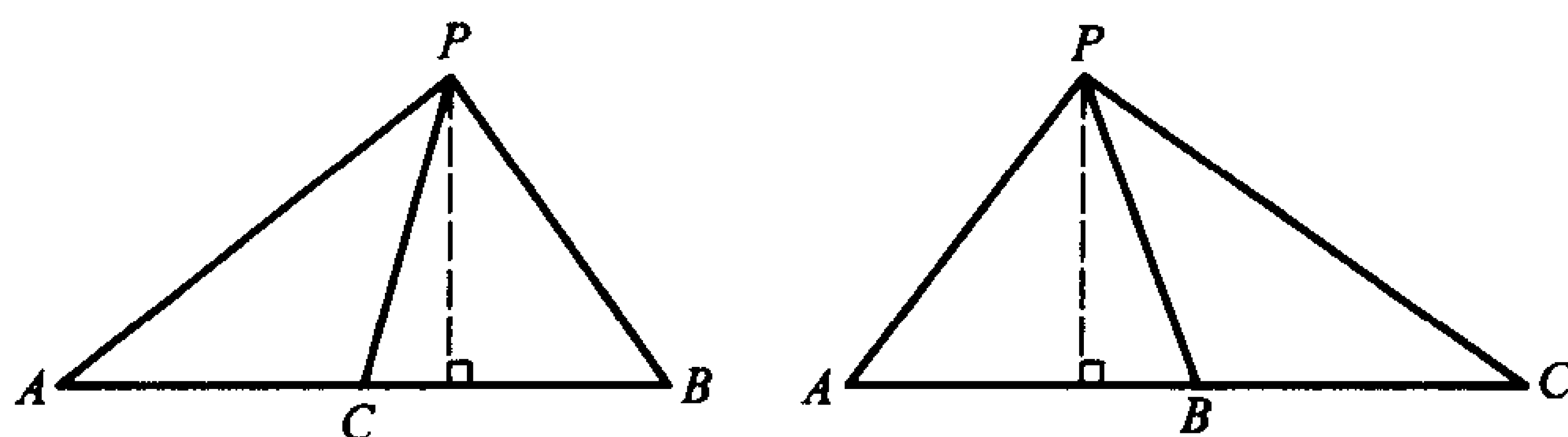


图 3－5

实上，这里只定义了$|\triangle ABC|$，但却没有定义$\triangle ABC$呢！

公理Ⅵ　平面上四点 A、B、C、D，如果三对线段 AB 与 CD、AC 与 BD、AD 与 BC 中每一对都没有异于 A、B、C、D 的公共点，则四个面积$|\triangle ABC|$、$|\triangle ABD|$、$|\triangle ACD|$、$|\triangle BCD|$中必有一个等于另外三个之和.

例如：如图 3－6，

$$|\triangle ABC| = |\triangle ACD| + |\triangle ABD| + |\triangle BCD| \quad (3-4)$$

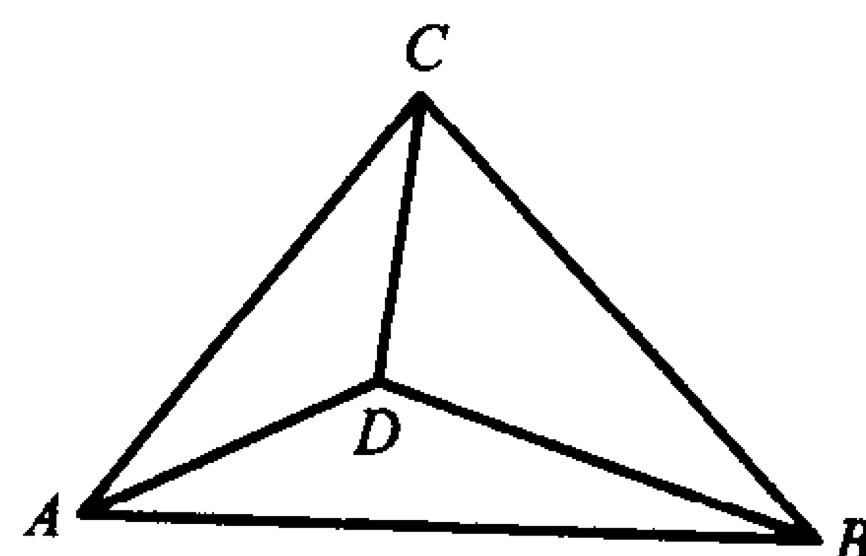


图 3－6

公理Ⅵ刻画了平面的一个重要特征. 有了公理Ⅵ，则可以定义三角形、凸四边形和凹四边形了.

定义 5　对于给定的三个点 A、B、C，所有满足条件

$$|\triangle PAB| + |\triangle PBC| + |\triangle PCA| = |\triangle ABC| > 0 \quad (3-5)$$

的点 P 组成的集合，叫做三角形 ABC，记作$\triangle ABC$. 若(3－5)的左端每项都不是 0，则称 P 是$\triangle ABC$ 的内点. 否则，叫做$\triangle ABC$ 的边界点. 平面上其他点叫做$\triangle ABC$ 的外点. 点 A、B、C 叫做$\triangle ABC$ 的顶点. 线段 AB、BC、CA 叫做$\triangle ABC$ 的三条边.

在不至于引起混淆时，这里也用记号$\triangle ABC$ 表示$|\triangle ABC|$.

当$|\triangle ABC| = 0$ 时，线段 AB、BC、CA 之并，称为退化$\triangle ABC$. 一般所说的$\triangle ABC$，均指非退化的三角形.

定义 6　若线段 AC 和 BD 有异于 A、B、C、D 的公共点 P，则称$\triangle ABC$ 和$\triangle ACD$ 之并为凸四边形. $ABCD$(或 $BCDA$，$CDAB$，$DABC$). AC、BD 叫做凸四边形的两条对角线. AB、BC、CD、DA 叫做凸四边形的四条边.

为了证明定义 6 的合理性，应当指出：$\triangle ABC$ 与$\triangle ACD$ 之并和$\triangle BDA$ 与$\triangle BDC$ 之并是同一个集合. 这在直观上是显然的，证起来也不难：只要先把四边形分成$\triangle PAB$、$\triangle PBC$、$\triangle PCD$、$\triangle PDA$ 就可以了.

定义 7　若 D 在$\triangle ABC$ 内部，则称$\triangle ABD$ 和$\triangle BDC$ 之并为凹四边形 $ABCD$. 线段 AC、BD 叫做凹四边形的对角线，而 AB、CB、CD、DA 叫做凹四边形的四条边.

公理Ⅵ　若 P 是 $\triangle ABC$ 的内点而 Q 是 $\triangle ABC$ 的外点，则线段 PQ 上必有 $\triangle ABC$ 的边界点.

下面，进一步引入角度这个重要度量.

公理Ⅶ(角度公理)　以任一点 A 为公共端点的两条射线组成一个角. 记作 $\angle A$，或临时指定一个记号如 $\angle 1$、$\angle 2$、$\angle \alpha$ 或 α、β. 也可以分别在两射线上各取一点 P、Q(均不同于 A)，记此角为 $\angle PAQ$ 或 $\angle QAP$. 每个角对应一个非负实数 α，$0 \leqslant \alpha \leqslant 180$，叫做这个角的度数. 记号 $\angle PAQ$(或 $\angle A$，$\angle QAP$，$\angle 1$)同时用以表示它的度数，记作 $\angle PAQ = \alpha^\circ$. 当射线 AQ 与 AP 是同一条射线时，$\angle PAQ = 0^\circ$. 当 A 在线段 PQ 上时，$\angle PAQ = 180^\circ$，如图 3－7.

公理Ⅸ　若 $\angle PAQ = 180^\circ$，B 是异于 A 的点，则有 $\angle BAQ + \angle BAP = 180^\circ$，这时称 $\angle BAQ$ 和 $\angle BAP$ 互为邻补角. 若 $\angle PAQ < 180^\circ$ 而且 B 在线段 PQ 上，则有 $\angle BAQ + \angle BAP = \angle QAP$. 并且，当 $\angle QAP > 0^\circ$ 时对任意实数 $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$，在 PQ 上有唯一的一个点 B，使 $\angle BAP = \lambda \angle QAP$. 如图 3－8.

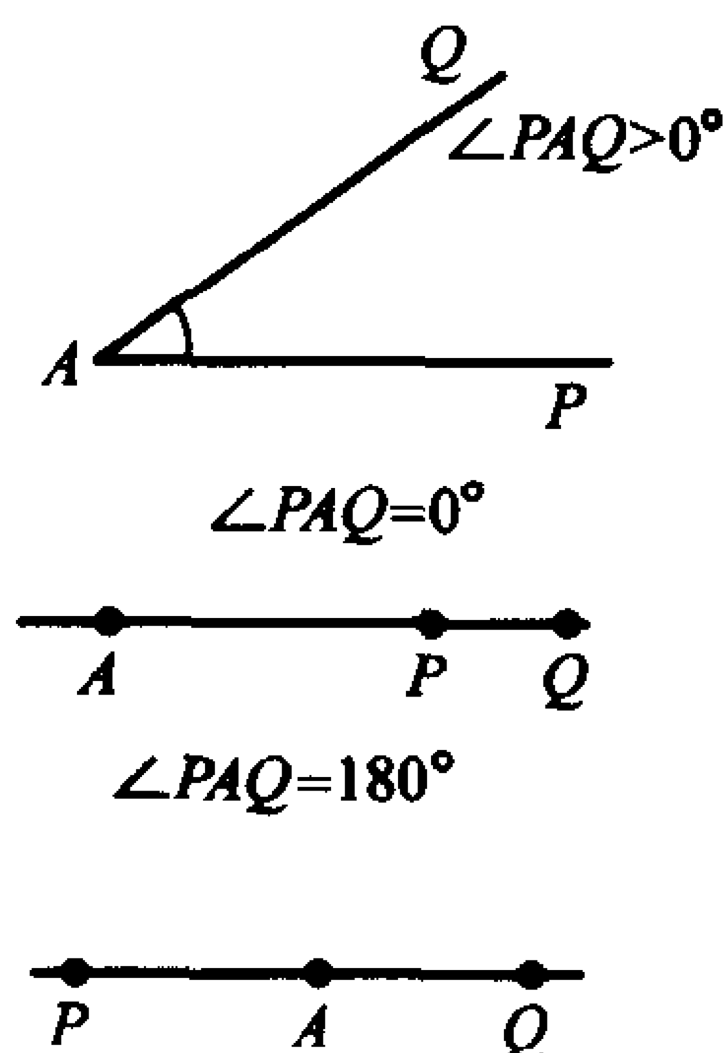


图 3－7

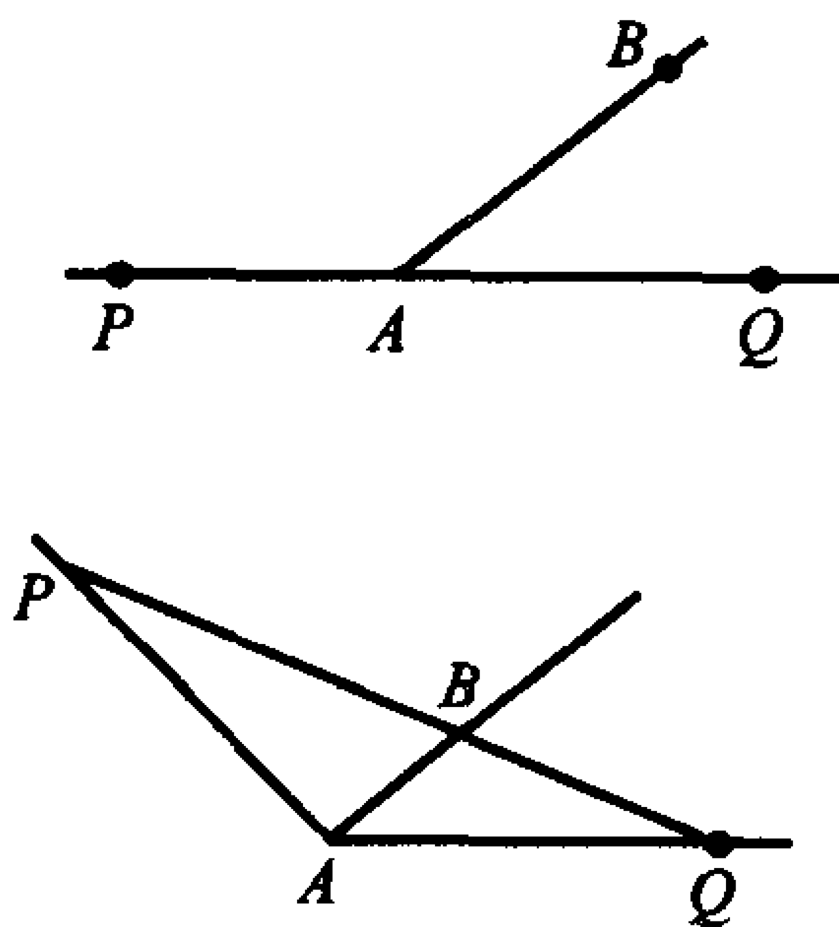


图 3－8

公理Ⅹ　若 $\angle PAQ = \angle P'A'Q'$，且 $PA = P'A'$，$QA = Q'A'$，则 $\triangle PAQ = \triangle P'A'Q'$.

最后这两条公理，把角度与线段、角度与面积联系起来.

这 10 条公理，是讨论的出发点. 10 条公理中的多数，如Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ、Ⅸ都是现行教材中既不叙述，也不证明而实际上默认了的. Ⅴ虽不显然，但却是学过小学数学的孩子易于理解的. 事实上，Ⅴ刻画了欧几里得平面的特点，它相当于平行公理. 如果没有Ⅴ而且不用适当的东西代替它，就只能得到非欧几何了.

有些众所周知的有关面积的性质，很容易从这些公理推证出来. 例如：

命题 1　若 A、B、C 三点共直线，则有 $\triangle ABC = 0$.

证明　不妨设，$AB = \lambda AC$，则由公理Ⅴ得

$$\triangle ABC = \lambda \triangle ACC. \tag{3-6}$$

但又由　$CC=2CC(=0)$，故又由公理V得

$$\triangle ACC=2\triangle ACC. \tag{3-7}$$

故$\triangle ACC=0$，即$\triangle ABC=0$.

命题2　若P在线段AB上，则对任一点Q，有

$$\triangle QAB=\triangle QAP+\triangle QBP. \tag{3-8}$$

证明　设$AP=\lambda AB$，由$AP+PB=AB$，可得$PB=(1-\lambda)AB$. 由公理V得

$$\begin{cases}\triangle QAP=\lambda\triangle QAB,\\ \triangle QPB=(1-\lambda)\triangle QAB.\end{cases} \tag{3-9}$$

两式相加，即得所求之等式.

命题3　若C在直线AB上，C异于A，则直线AC和直线AB相同.

证明　只要证明直线AC上任一点P也在直线AB上，同时直线AB上任一点Q也在直线AC上就够了.

设P在直线AC上，则$\triangle PAC=0$. 设

$$AB=\lambda AC,$$

由公理V

$$\triangle PAB=\lambda\triangle PAC=0.$$

再由公理Ⅲ，可知P在AB上. 同理，由Q在直线AB上可推知Q在直线AC上.

这个命题的含义正是“两点决定一直线.”在欧几里得的公理体系中是一条公理.

有一些看来很显然的事实，在目前通用的教材体系中，是不好证明的. 常常用默认的办法. 下面是一个例子.

命题4　如图3-9，设P是$\triangle ABC$的边AB上的一点，P异于A、B. 又Q是PC线段上异于P、C的一点，则Q在$\triangle ABC$内部.

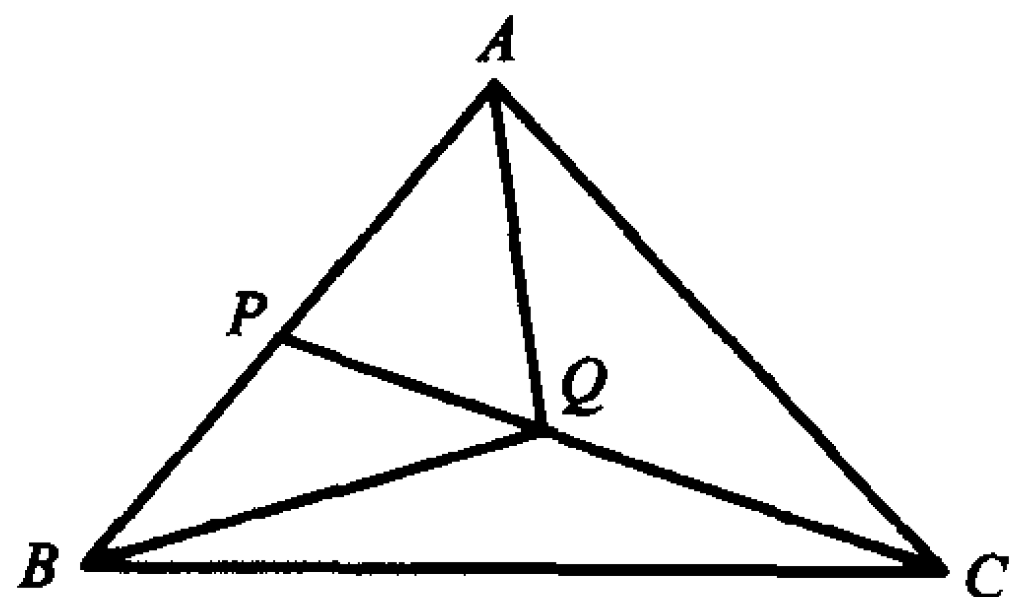


图3-9

证明　由命题2得

$$\begin{aligned}\triangle ABC&=\triangle PAC+\triangle PBC\\&=\triangle QAC+\triangle QAP+\triangle QBC+\triangle QPB\\&=\triangle QAC+\triangle QBC+\triangle QAB.\end{aligned}$$

因为P不同于AB，故$\triangle PAC$、$\triangle PBC$均非0. 又因Q不同于P、C，故$\triangle QAC$、$\triangle QAP$、$\triangle QBC$、$\triangle QPB$均非0. 由定义5可知Q在$\triangle ABC$内.

张景中欧氏几何公理系统以面积为中心，不但逻辑结构简单，而且易使教材成放射性，从而使推理途径简捷. 三角形面积公式$S_{\triangle}=\frac{1}{2}bc\cdot\sin A$沟通了不变量：长度、角度、面积三者之间的关系. 在高等数学中，面积是向量的叉积，是行列式，是积分，是测度，是外微分形式. 抓住面积，从小学、初中到高中、大学，数学的

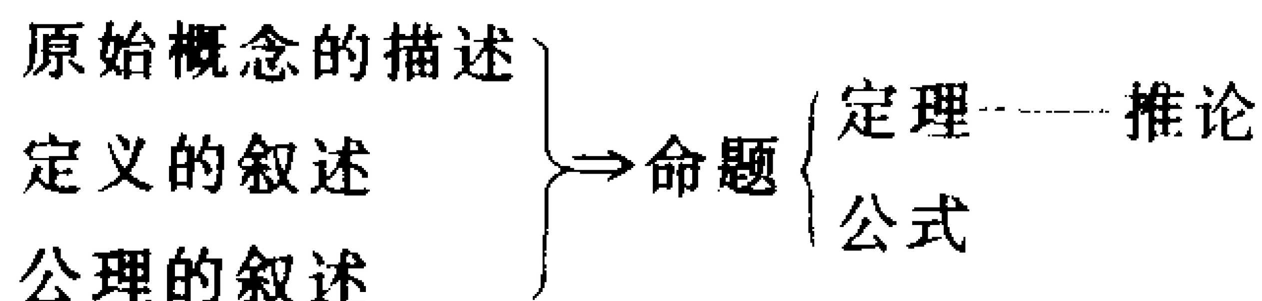
内容可以一线相串;抓住面积,结合代数和三角,可以使教材精简,解题方法巧妙.面积方法本质是无坐标的解析法,它起点低而观点高.

习 题 3.6

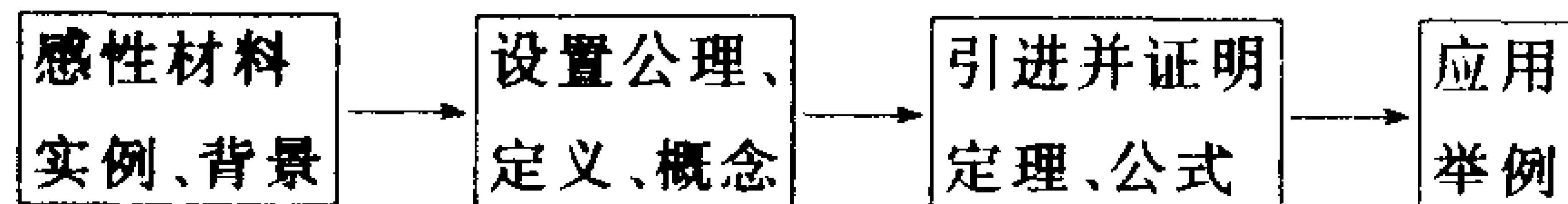
1. 张景中欧氏几何公理系统产生的背景是什么?
2. 张景中欧氏几何公理系统的特点是什么?

第七节 中学数学教材中的公理系统

中学数学知识有一定的系统,原则上应按公理化思想方法展开.特别是平面几何、立体几何内容,应明确地列出公理组.在一般的中学数学教材中,大体上是按照下面的逻辑结构,采用演绎方法展开的:



各章节教材在具体展开时,为便于学生接受,一般都增添了便于理解教材内容的实例,采用如下的块状结构:



从全部教材的逻辑结构和具体内容看,总体上体现了公理化的基本思想,但就其公理系统而论,由于考虑到中学生接受能力和教材的精简,因而对公理独立性的要求不是那么严格,而且公理系统也不完备,有时还要借助于直观.例如,平面几何教材,从它的逻辑结构和具体内容看,基本上沿用了欧氏的不完善的公理系统.首先选定一批基本元素和一批关系(包括基本关系)作为基本概念,采用扩大公理体系,然后以此为出发点,用形式逻辑方法定义有关概念,推导一系列定理,把有关的几何知识贯穿起来.其中公理之间是相容(不矛盾)的,但所选取的公理既过剩又不足,是不独立和不完备的.20 世纪末我国的平面几何教材中共引进几何公理 16 条,等量公理 5 条,不等量公理 6 条.在 16 条几何公理中,有 11 条新增公理,5 条强化了的公理."两点之间,线段最短","同位角相等,则两直线平行"等都是新增的公理;而"经过直线外一点,有且只有一条直线和这条直线平行"是强化了的平行公理.教材的这种处理方案,虽然从公理系统来说是不够严格的,有悖于公理体系的完备性和独立性.但是,这样做能减少初学者的困难,便于学生接受,从教学论的角度来看是有积极作用的.

张景中在介绍了他的欧氏几何公理体系后,曾指出:引进了公理系统,是不

是在课堂上就要把这个公理系统作为平面几何学习的开端呢？大可不必．从公理系统入手讲几何，就像学骑自行车先学上车一样．骑自行车本来先要上车，但学骑时可以先请别人扶着，爬上车学前进．学会了蹬车前进，回过头来学上车是容易的．

从历史上看，几何公理体系的诞生，是在积累了大量几何知识之后的事．逻辑上，是先有公理，后有丰富多彩的定理和公式．人的认识过程恰恰相反，恰恰是先掌握了大量的定理，而后，为了彻底弄清这些定理的依据，才想到了建立公理体系．

对中学生教几何，似乎应当遵循认识的顺序，而不完全依照逻辑的顺序．先带引他们欣赏五光十色的几何园地的美景，最后向他们说明，这个园地的基石在何处．这样，既符合认识规律，也适应年龄特征．

中学数学教材中的公理体系，也是每次教学改革的焦点，特别是在这次基础教育课程改革中，更是焦点中的热点．如何处理好这个问题，只有大家群策群力，献计献策，才有可能取得较佳的效果．

习　题　3.7

1．中学数学教材中的公理系统应怎样处理？

2．平面几何中的公理组应如何安排？

第四章　平面几何名题欣赏

在几何学发展的历史长河中，许多经久不衰的平面几何名题，犹如一颗颗闪烁的明珠，璀璨夺目，光彩耀人，推动着几何学乃至整个数学的发展，它们中有的从一发现就吸引着人们的关注，有的经过几代甚至几十代数学家的努力，得出许多耐人寻味、发人深省的结论.

第一节　几个著名定理

1. 梅涅劳斯定理

定理 1　设 A'、B'、C' 分别是 $\triangle ABC$ 的边 BC、CA、AB 所在直线上的点（即三点中或一点或三点在边的延长线上），则 A'、B'、C' 共线的充要条件是

$$\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=1. \tag{4-1}$$

证明　必要性：如图 4-1，过 A 作直线 $AD\parallel C'A'$ 交 BC 的延长线于 D，则 $\frac{CB'}{B'A}=\frac{CA'}{A'D}$，$\frac{AC'}{C'B}=\frac{DA'}{A'B}$.

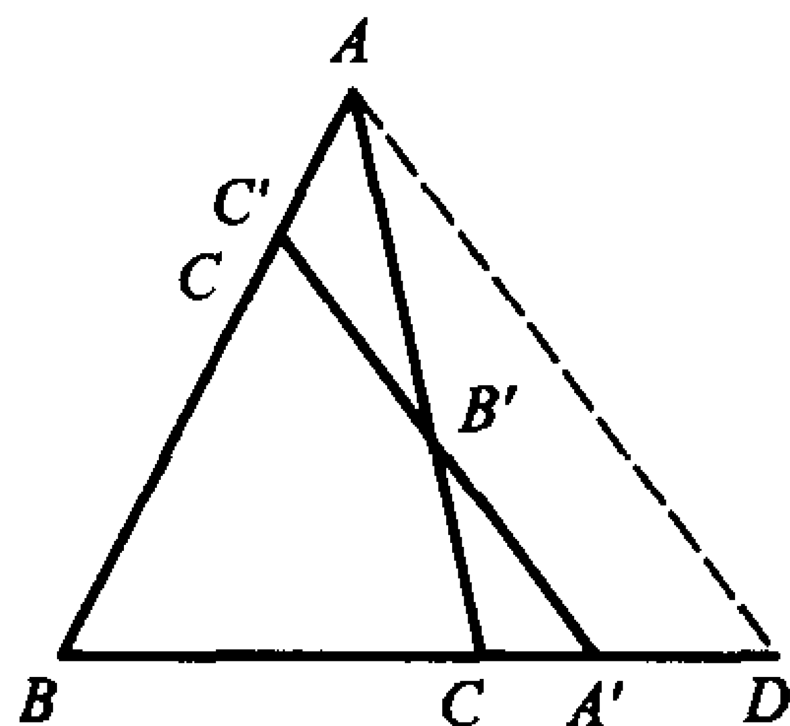


图 4-1

故 $\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CA'}{A'D}\cdot\frac{DA'}{A'B}=1$.

充分性：设直线 $A'B'$ 交 AB 于 C_1，则由必要性，得到 $\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC_1}{C_1B}=1$. 又由题设有 $\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A'}\cdot\frac{AC'}{C'B}=1$，于是 $\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{AC'}{C'B}$. 由合比定理得 $\frac{AC_1}{AB}=\frac{AC'}{AB}$，即 $AC_1=AC'$，从而 C_1 与 C' 重合. 故 A'，B'，C' 三点共线.

注　① 上述定理中，若采用有向线段，则(4-1)式右边为-1；

② 定理中的必要性即为梅涅劳斯定理，充分性即为梅涅劳斯定理的逆定理；

③ 梅涅劳斯定理可以推广到平面凸四边形、四面体乃至 n 维欧氏空间中去.

定理 1 的角元形式　设 A'、B'、C' 分别是 $\triangle ABC$ 的边 BC、CA、AB 所在直

线上的点(同上),则 A'、B'、C'共线的充要条件是

$$\frac{\sin\angle BAA'}{\sin\angle A'AC}\cdot\frac{\sin\angle ACC'}{\sin\angle C'CB}\cdot\frac{\sin\angle CBB'}{\sin\angle B'BA}=1. \qquad (4-1')$$

证明 由 $\frac{BA'}{A'C}=\frac{S_{\triangle ABA'}}{S_{\triangle AA'C}}=\frac{AB\cdot\sin\angle BAA'}{AC\cdot\sin\angle A'AC}$.

同理 $\frac{CB'}{B'A}=\frac{BC\cdot\sin\angle CBB'}{AB\cdot\sin\angle B'BA}$, $\frac{AC'}{C'B}=\frac{AC\cdot\sin\angle ACC'}{BC\cdot\sin\angle C'CB}$.

以上三式相乘,应用(4-1)式即得(4-1')式.

例 1 如图 4-2,$\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 和 $\triangle ABC$ 的三边所在的 3 条直线都相切,E,F,G,H 为切点,直线 EG 与 FH 交于点 P.求证:$PA\perp BC$.

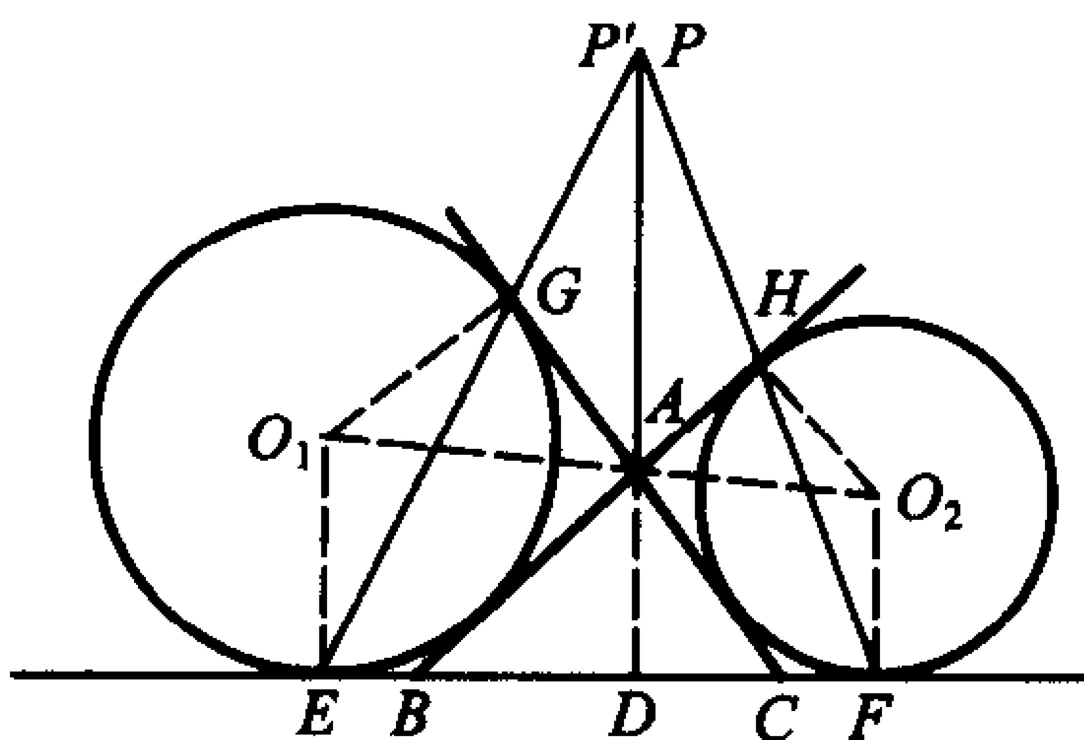


图 4-2

证明 过 A 作 $AD\perp BC$ 于 D,延长 DA 交直线 HF 于点 P'.

对 $\triangle ABD$ 及截线 FHP' 应用梅涅劳斯定理,有 $\frac{AH}{HB}\cdot\frac{BF}{FD}\cdot\frac{DP'}{P'A}=1$.

由 $BF=BH$,有 $\frac{AH}{FD}\cdot\frac{DP'}{P'A}=1$.

又 O_1、A、O_2 三点共线,连 O_1E、O_1G、O_2F、O_2H,则由 $O_1E/\!/AD/\!/O_2F$ 有 $\triangle AGO_1\backsim\triangle AHO_2$,即 $\frac{DE}{DF}=\frac{AO_1}{AO_2}=\frac{AG}{AH}$. 故 $\frac{AH}{FD}=\frac{AG}{ED}$.

又 $CE=CG$,则 $1=\frac{AH}{FD}\cdot\frac{DP'}{P'A}=\frac{DP'}{P'A}\cdot\frac{AG}{ED}=\frac{DP'}{P'A}\cdot\frac{AG}{GC}\cdot\frac{CE}{ED}$.

对 $\triangle ABC$,应用梅涅劳斯定理的逆定理,知 P'、G、E 三点共线,即 P' 为直线 EG 与 FH 的交点.此说明 P' 点与 P 点重合.从而 $PA\perp BC$.

2. 塞瓦定理

定理 2 设 A'、B'、C' 分别是 $\triangle ABC$ 的边 BC、CA、AB 所在直线上的点(即三点中或三点或一点在边上),则三直线 AA'、BB'、CC' 共点或平行的充要条件是

$$\frac{BA'}{A'C}\cdot\frac{CB'}{B'A}\cdot\frac{AC'}{C'B}=1. \qquad (4-2)$$

证明 必要性:若 AA'、BB'、CC' 交于一点 P,则过 A 作 BC 的平行线,分别交 BB',CC' 的延长线于 D,E(如图 4-3(a)),得 $\frac{CB'}{B'A}=\frac{BC}{AD}$,$\frac{AC'}{C'B}=\frac{EA}{BC}$.

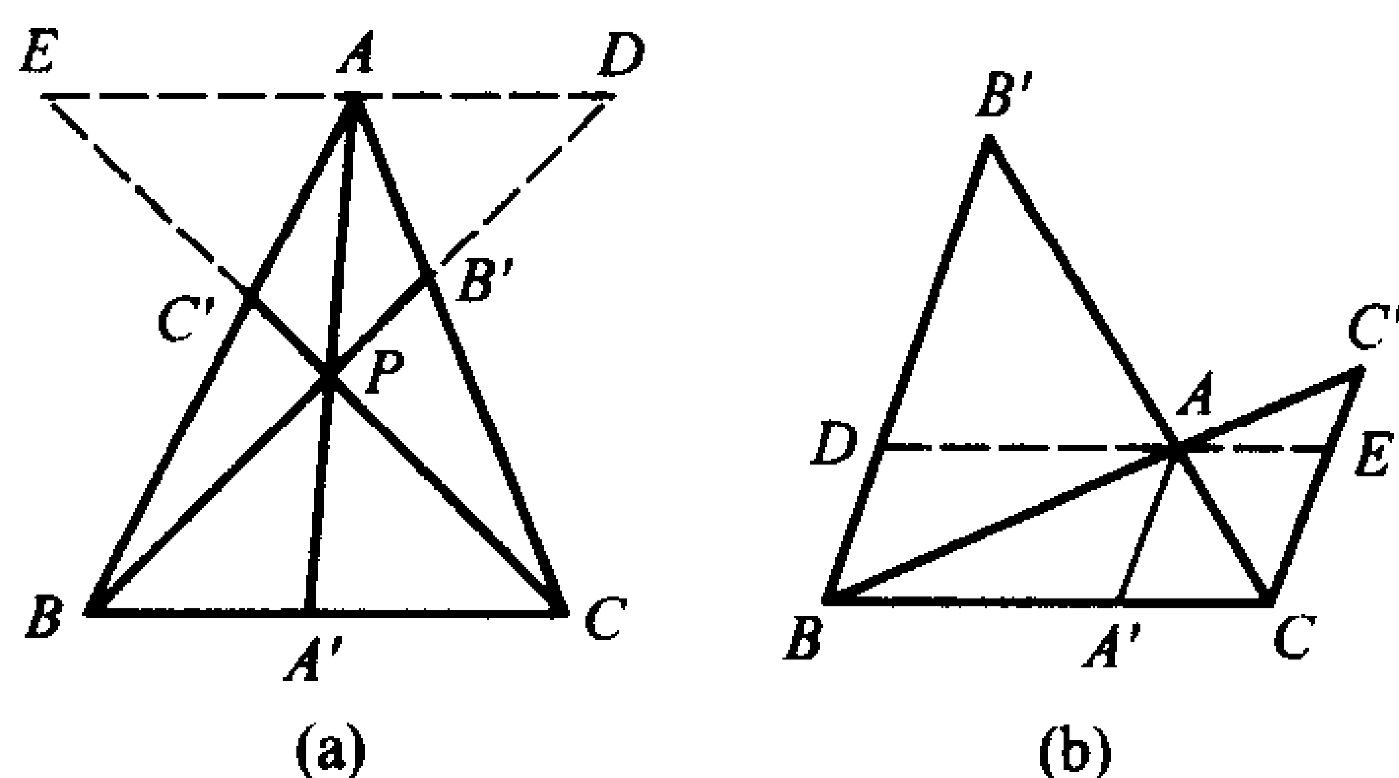


图 4－3

又由$\dfrac{BA'}{AD}=\dfrac{A'P}{PA}=\dfrac{A'C}{EA}$，有$\dfrac{BA'}{A'C}=\dfrac{AD}{EA}$.

从而$\dfrac{BA'}{A'C}\cdot\dfrac{CB'}{B'A}\cdot\dfrac{AC'}{C'B}=\dfrac{AD}{EA}\cdot\dfrac{BC}{AD}\cdot\dfrac{EA}{BC}=1$.

若 AA'、BB'、CC'三线平行(如图 4－3(b))，可类似证明(略).

充分性：若 AA'与 BB'交于点 P，设 CP 与 AB 的交点为 C_1，则由必要性知 $\dfrac{BA'}{A'C}\cdot\dfrac{CB'}{B'A}\cdot\dfrac{AC_1}{C_1B}=1$. 而题设有$\dfrac{BA'}{A'C}\cdot\dfrac{CB'}{B'A}\cdot\dfrac{AC'}{C'B}=1$，由此有$\dfrac{AC_1}{C_1B}=\dfrac{AC'}{C'B}$，即$\dfrac{AC_1}{AB}=\dfrac{AC'}{AB}$，由此知 C_1 与 C'重合. 从而 AA'、BB'、CC'三线共点.

若 $AA'\parallel BB'$，则$\dfrac{CB'}{B'A}=\dfrac{CB}{BA'}$代入已知条件有$\dfrac{AC'}{C'B}=\dfrac{A'C}{CB}$，由此知 $CC'\parallel AA'$. 故 $AA'\parallel BB'\parallel CC'$.

注　① 定理的必要性即为塞瓦定理，充分性即为塞瓦定理的逆定理；

② 塞瓦定理中的三线共点可以推广为两两相交；

③ 塞瓦定理可以推广到四面体中去.

定理 2 的角元形式　设 A'、B'、C'分别是$\triangle ABC$ 中的边 BC、CA、AB 所在直线上的点(同前)，则三直线 AA'，BB'，CC'共点或平行的充要条件是

$$\frac{\sin\angle BAA'}{\sin\angle A'AC}\cdot\frac{\sin\angle ACC'}{\sin\angle C'CB}\cdot\frac{\sin\angle CBB'}{\sin\angle B'BA}=1. \qquad (4-2')$$

其证明与式(4－1′)完全相同(略).

推论　设 A_1、B_1、C_1 分别是$\triangle ABC$ 的外接圆三段弧$\overset{\frown}{BC}$、$\overset{\frown}{CA}$、$\overset{\frown}{AB}$上的点，则 AA_1、BB_1、CC_1 共点的充要条件是

$$\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}\cdot\frac{AC_1}{C_1B}=1. \qquad (4-2'')$$

证明　设$\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R，AA_1 交 BC 于 A'，BB_1 交 CA 于 B'，CC_1 交 AB 于 C'，由 A、C_1、B、A_1、C、B_1 六点共圆及正弦定理有

$$\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{2R\cdot\sin\angle BAA_1}{2R\cdot\sin\angle A_1AC}=\frac{\sin\angle BAA'}{\sin\angle A'AC}.$$

同理$\dfrac{CB_1}{B_1A}=\dfrac{\sin\angle CBB'}{\sin\angle B'BA}$，$\dfrac{AC_1}{C_1B}=\dfrac{\sin\angle ACC'}{\sin\angle C'CB}$.

以上三式相乘，应用式(4－2′)即得式(4－2″).

例 2　如图 4－4，设 P 为$\triangle ABC$ 内任一点，在形内作射线 AL、BM、CN，使得$\angle CAL=\angle PAB$，$\angle MBC=\angle PBA$，$\angle NCA=\angle BCP$. 求证：AL、BM、CN 三线共点.

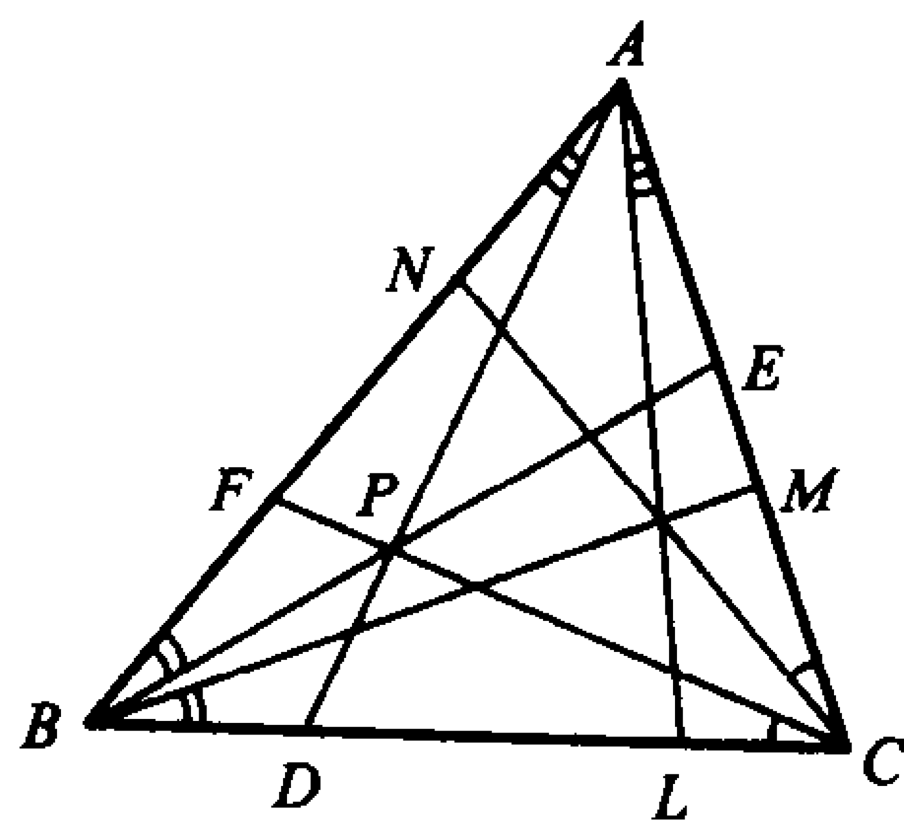


图 4－4

证法 1　设 AL 交 BC 于 L，BM 交 CA 于 M，CN 交 AB 于 N，直线 AP 交 BC 于 D，直线 BP 交 AC 于 E，直线 CP 交 AB 于 F. 对$\triangle ABC$ 及点 P，应用塞瓦定理，有$\dfrac{AF}{FB}\cdot\dfrac{BD}{DC}\cdot\dfrac{CE}{EA}=1$.

在$\triangle ABL$ 和$\triangle ACL$ 中应用正弦定理，有

$$\begin{aligned}\frac{BL}{LC}&=\frac{BL}{AL}\cdot\frac{AL}{LC}=\frac{\sin\angle BAL}{\sin\angle B}\cdot\frac{\sin\angle C}{\sin\angle LAC}=\frac{\sin\angle PAC}{\sin\angle PAB}\cdot\frac{\sin\angle C}{\sin\angle B}\\&=\frac{\sin\angle PAC}{\sin\angle C}\cdot\frac{\sin\angle B}{\sin\angle PAB}\cdot\frac{\sin^2\angle C}{\sin^2\angle B}=\frac{DC}{AD}\cdot\frac{AD}{BD}\cdot\frac{\sin^2\angle C}{\sin^2\angle B}\\&=\frac{DC}{BD}\cdot\frac{\sin^2\angle C}{\sin^2\angle B}.\end{aligned}$$

同理，$\dfrac{CM}{MA}=\dfrac{AE}{EC}\cdot\dfrac{\sin^2\angle A}{\sin^2\angle C}$，$\dfrac{AN}{NB}=\dfrac{BF}{FA}\cdot\dfrac{\sin^2\angle B}{\sin^2\angle A}$.

以上三式相乘有$\dfrac{BL}{LC}\cdot\dfrac{CM}{MA}\cdot\dfrac{AN}{NB}=\dfrac{DC}{BD}\cdot\dfrac{AE}{EC}\cdot\dfrac{BF}{FA}=1$.

由塞瓦定理的逆定理，知 AL、BM、CN 共线.

证法 2　得交点 L、M、N、D、E、F 同证法 1.

对$\triangle ABC$ 及点 P 应用式(4－2′)，有

$$\frac{\sin\angle PAB}{\sin\angle PAC}\cdot\frac{\sin\angle PBC}{\sin\angle PBA}\cdot\frac{\sin\angle PCA}{\sin\angle PCB}=1.$$

由题设$\angle PAB=\angle CAL$，$\angle PBA=\angle CBM$，$\angle PCB=\angle ACN$，则有$\angle BAL=\angle PAC$，$\angle ABM=\angle PBC$，$\angle BCN=\angle PCA$. 于是

$$\frac{\sin\angle BAL}{\sin\angle CAL}\cdot\frac{\sin\angle CBM}{\sin\angle ABM}\cdot\frac{\sin\angle ACN}{\sin\angle BCN}$$

$$=\frac{1}{\dfrac{\sin\angle PAB}{\sin\angle PAC}\cdot\dfrac{\sin\angle PBC}{\sin\angle PBA}\cdot\dfrac{\sin\angle PCA}{\sin\angle PCB}}=\frac{1}{1}=1.$$

对$\triangle ABC$又应用式(4-2′),知AL、BM、CN三线共点.

3. 托勒密定理

定理3 凸四边形$ABCD$内接圆的充要条件是

$$AB\cdot CD+BC\cdot AD=AC\cdot BD. \tag{4-3}$$

证明 必要性:如图4-5,四边形$ABCD$内接于$\odot O$,在BD上取点P,使$\angle PAB=\angle CAD$,则$\triangle ABP\backsim\triangle ACD$,于是$AB\cdot CD=AC\cdot BP$.

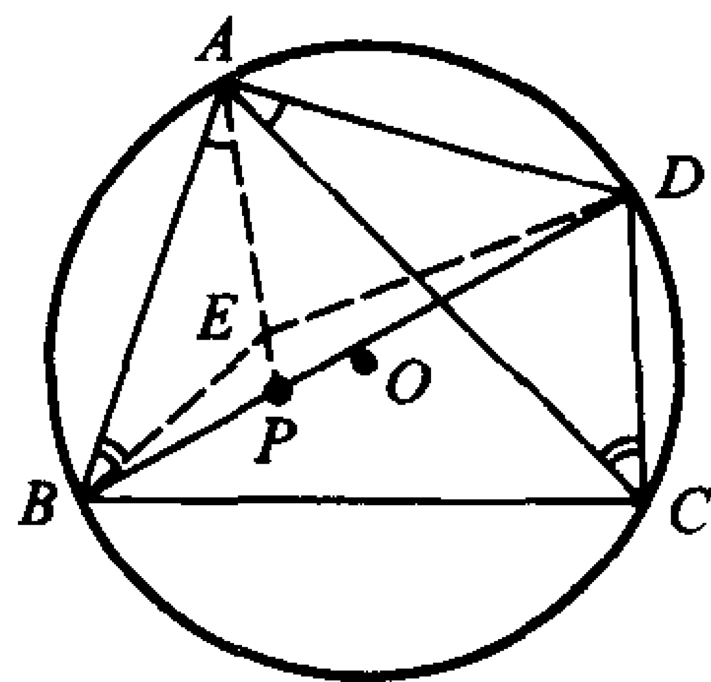


图4-5

又$\triangle ABC\backsim\triangle APD$,有$BC\cdot AD=AC\cdot PD$.

故$AB\cdot CD+BC\cdot AD=AC(BP+PD)=AC\cdot BD$.

充分性:在凸四边形$ABCD$内取点E,使$\angle BAE=\angle CAD$,$\angle ABE=\angle ACD$,则$\triangle ABE\backsim\triangle ACD$,即$\dfrac{AD}{AE}=\dfrac{AC}{AB}=\dfrac{CD}{BE}$,即$AB\cdot CD=AC\cdot BE$.

又注意$\angle DAE=\angle CAB$及上述比例式,有$\triangle ADE\backsim\triangle ACB$,从而$AD\cdot BC=AC\cdot ED$.于是

$$AB\cdot CD+BC\cdot AD=AC(BE+ED)\geqslant AC\cdot BD,$$

其中等号当且仅当E在BD上,即$\angle ABD=\angle ACD$时成立,即A,B,C,D四点共圆时成立.证毕.

注 ① 定理的必要性为托勒密定理,充分性为托勒密定理的逆定理;

② 从充分性证明可知,对于任意是四边形$ABCD$,均成立托勒密不等式:$AB\cdot CD+BC\cdot AD\geqslant AC\cdot BD$;

③ 由托勒密定理,应用正弦定理将BD,DC,BC换掉即得如下三弦定理:AB,AC,AD是一圆上顺次的三条弦,则$AB\cdot\sin\angle CAB+AD\cdot\sin\angle CAB=AC\cdot\sin\angle BAD$;

④ 由托勒密定理可导出三角中的加法定理$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$.

⑤ 托勒密定理可以推到直线上去,也可以推到空间四边形中去.

例3 如图4-6,在$\triangle ABC$中,$AB>AC$,点O是外心,两条高BE,CF交于H点,点M,N分别在线段BH,HF上,且满足$BM=CN$.求证:$\dfrac{MH+NH}{OH}=\sqrt{3}$的充要条件是$\angle A=60°$.

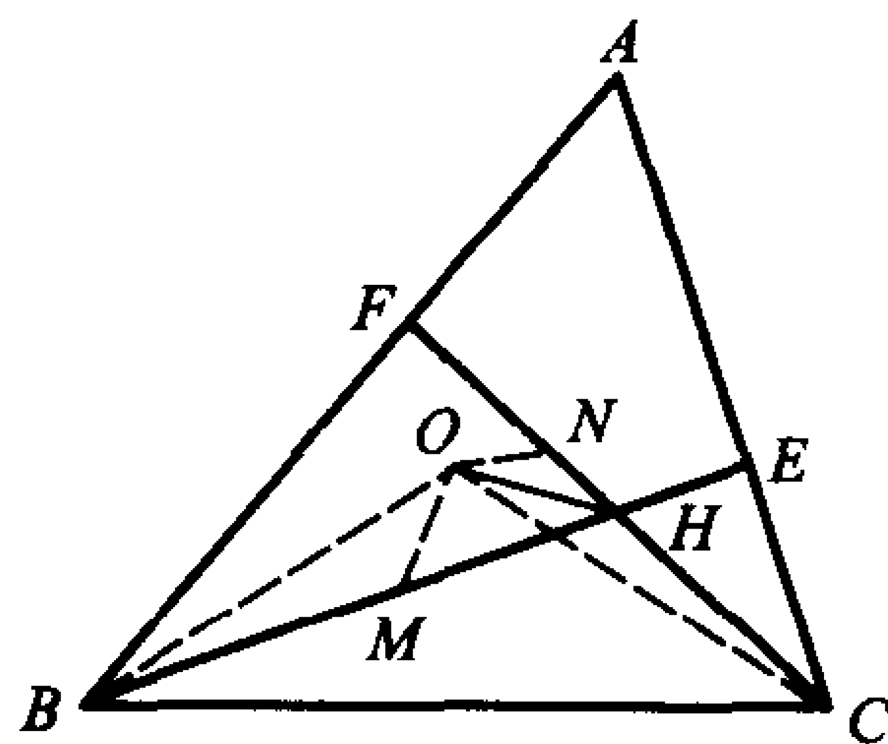


图4-6

证明　连 OB、OC，则$\angle BOC=2\angle A$，$\angle BHC=180^\circ-\angle HBC-\angle HCB=\angle B+\angle C=180^\circ-\angle A$. 设$\triangle ABC$的外接圆半径为$R$，则$OB=OC=R$.

又 $MH+NH=(BH-BM)+(CN-CH)=BH-CH$.

$\angle A=60^\circ \Leftrightarrow B$、$O$、$H$、$C$ 四点共圆及托勒密定理$\Leftrightarrow BO\cdot CH+OH\cdot BC=BH\cdot OC \Leftrightarrow R\cdot CH+OH\cdot\sqrt{3}R=BH\cdot R \Leftrightarrow BH-CH=\sqrt{3}OH \Leftrightarrow MH+NH=\sqrt{3}OH$.

4. 斯特瓦尔特定理

定理 4　设 B，P，C 依次分别为从 A 点引出的三条射线 AB，AP，AC 上的点，B，P，C 共线的充要条件是

$$AP^2=AB^2\frac{PC}{BC}+AC^2\cdot\frac{BP}{BC}-BP\cdot PC \qquad (4-4)$$

证明　如图 4－7，设$\angle APB=\theta_1$，$\angle APC=\theta_2$. 不失一般性，设 $\theta_2<90^\circ$.

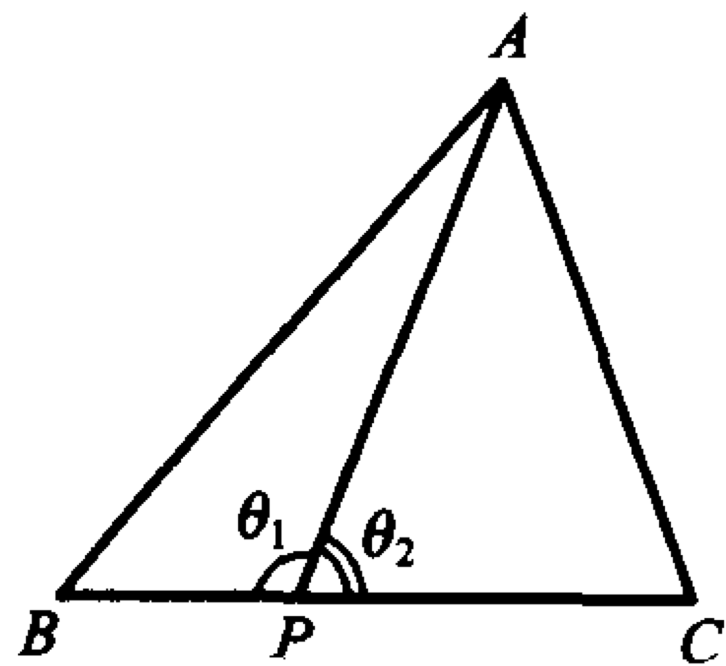


图 4－7

对于$\triangle ABP$和$\triangle APC$分别应用余弦定理有

$$AB^2=AP^2+BP^2-2AP\cdot BP\cdot\cos\theta_1,$$

$$AC^2=AP^2+CP^2-2AP\cdot CP\cdot\cos\theta_2.$$

将上述两式分别乘以 PC，PB 后相加，得

$$AB^2\cdot CP+AC^2\cdot BP$$
$$=AP^2(BP+CP)+BP\cdot CP(BP+CP)-$$
$$2AP\cdot BP\cdot CP(\cos\theta_1+\cos\theta_2), \qquad (*)$$

于是 B、P、C 共线$\Leftrightarrow$($*$)式右边$=AP^2\cdot BC+BP\cdot CP\cdot BC$

$$\Leftrightarrow AP^2=AB^2\cdot\frac{PC}{BC}+AC^2\frac{BP}{BC}-BP\cdot PC.$$

注　① 定理的必要性即为斯特瓦尔特定理，充分性即为斯特瓦尔特定理的逆定理. 斯特瓦尔特定理还有如下一系列有趣推论：

a. 若 $AB=AC$，则 $AP^2=AB^2-BP\cdot PC$；

b. 若 P 为 BC 中点，则

$$AP^2=\frac{1}{2}AB^2+\frac{1}{2}AC^2-\frac{1}{4}BC^2;$$

c. 若 AP 平分$\angle BAC$，则

$$AP^2=AB\cdot AC-BP\cdot PC;$$

d. 若 AP 平分$\angle BAC$的外角，则

$$AP^2=BP\cdot PC-AB\cdot AC;$$

② 斯特瓦尔特定理可以推广到四面体中去.

例 3 另证 如图 4-8,设$\odot O$的半径为R,$OH=d$,$CH=x$,$BH=y$,作正$\triangle HCL$.若$\angle BAC=60°$,则知B,H,L共线,且L在$\odot O$上.

延长OH两端交$\odot O$于T,S,则由相交弦定理,有$TH\cdot HS=BH\cdot HL$,即

$(R+d)(R-d)=xy$,亦即$R^2=d^2+xy$.

对$\triangle BCL$及边BL上的点H,应用斯特尔瓦特定理,并注意$BC=\sqrt{3}R$,则

图 4-8

$$BC^2\cdot LH+LC^2\cdot BH=LH\cdot BH\cdot BL+CH^2\cdot BL,$$

即
$$(\sqrt{3}R)^2\cdot x+x^2y=x\cdot y(x+y)+x^2(x+y),$$

亦即
$$R^2=\frac{1}{3}(x^2+xy+y^2).$$

于是,$\frac{1}{3}(x^2+xy+y^2)=d^2+xy$,即$\frac{|x-y|}{d}=\sqrt{3}$.

而当$AB>AC$时,$MH+NH=BH-CH=|x-y|$.

故
$$\frac{MH+NH}{OH}=\frac{|x-y|}{d}=\sqrt{3}.$$

由上知,充分性获证.必要性逆推稍加整理即证.

5. 张角定理

定理 5 设B、P、C依次分别为从A点引出的三条射线AB、AP、AC上的点,线段BP,PC对点A的张角分别为α,β,且$\alpha+\beta<180°$,则B、P、C共线的充要条件是

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{AP}=\frac{\sin\alpha}{AC}+\frac{\sin\beta}{AB}. \tag{4-5}$$

证明 如图 4-9,B、P、C三点共线

$\Leftrightarrow S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABP}+S_{\triangle APC}$

$\Leftrightarrow\frac{1}{2}AB\cdot AC\cdot\sin(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}AB\cdot AP\cdot\sin\alpha+\frac{1}{2}AP\cdot AC\cdot\sin\beta$

$\Leftrightarrow\frac{\sin(\alpha+\beta)}{AP}=\frac{\sin\alpha}{AC}+\frac{\sin\beta}{AB}$.

注 ① 定理的必要性即为张角定理,充分性即为张角定理的逆定理;

② 张角定理可以推广到四面体中去;

③ 由张角定理可以导出斯特瓦尔特定理,反之亦可.

例 4 如图 4-10,在四边形$ABCD$中,对角线AC平分$\angle BAD$,在CD上取

一点 E，BE 与 AC 相交于 F，延长 DF 交 BC 于 G. 求证：$\angle GAC=\angle EAC$.

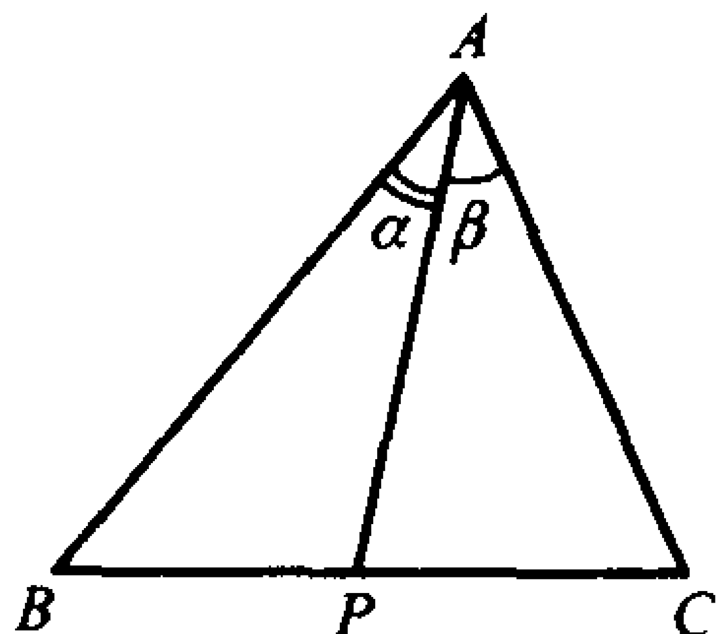


图 4 - 9

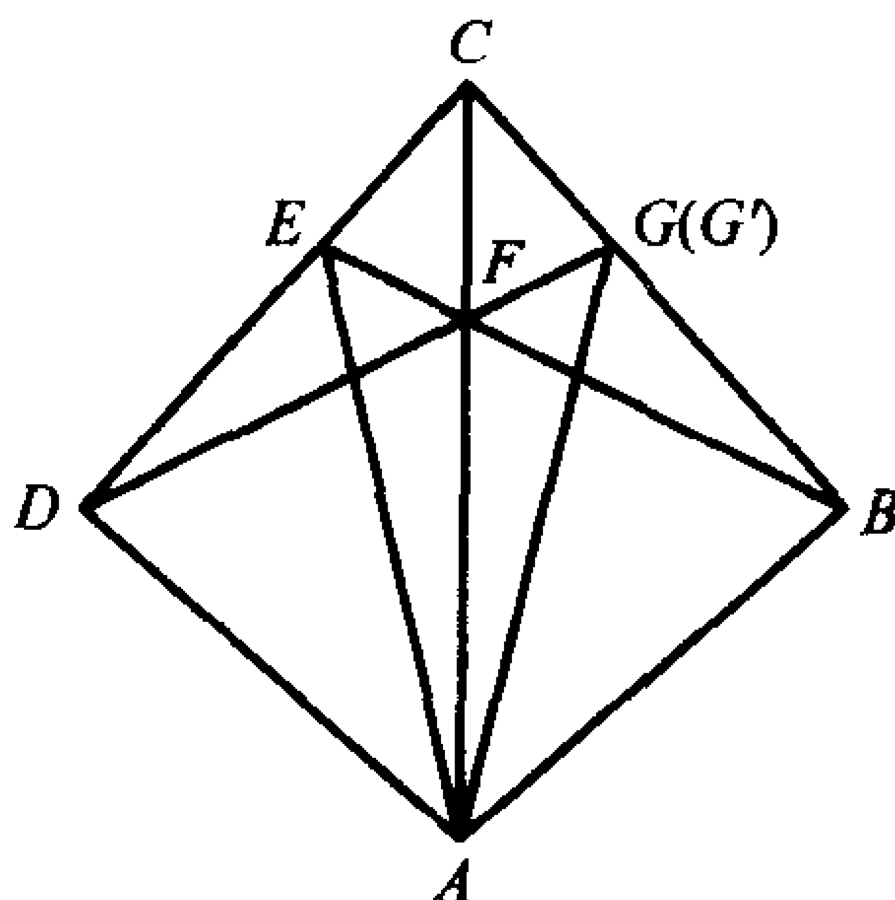


图 4 - 10

证明　作 $\angle CAG'=\angle CAE$ 交 BC 于 G'. 只须证 G',F,D 共线即可.

设 $\angle BAC=\angle CAD=\theta$，$\angle CAG'=\angle CAE=\alpha$. 以 A 为视点，分别对 B,F,E；B,G',C；C,E,D 应用张角定理得 $\dfrac{\sin(\theta+\alpha)}{AF}=\dfrac{\sin\alpha}{AB}+\dfrac{\sin\theta}{AE}$，　(1)

$$\frac{\sin\theta}{AG'}=\frac{\sin\alpha}{AB}+\frac{\sin(\theta-\alpha)}{AC},\tag{2}$$

$$\frac{\sin\theta}{AE}=\frac{\sin\alpha}{AD}+\frac{\sin(\theta-\alpha)}{AC},\tag{3}$$

由(1)－(2)＋(3)式得 $\dfrac{\sin(\theta+\alpha)}{AF}=\dfrac{\sin\alpha}{AD}+\dfrac{\sin\theta}{AG'}$.

又以 A 为视点，对 G',F,D 应用张角定理的逆定理，知 G',F,D 共线，亦知 G' 与 G 重合. 故 $\angle GAC=\angle EAC$.

6. 西姆松定理

定理 6　三角形外一点在三角形外接圆上的充要条件是该点在三角形三边所在直线上的射影共线.

证明　设 $\triangle ABC$ 外一点 P 在其三边 BC,CA,AB 上的射影分别为 L,M,N(如图 4 - 11).

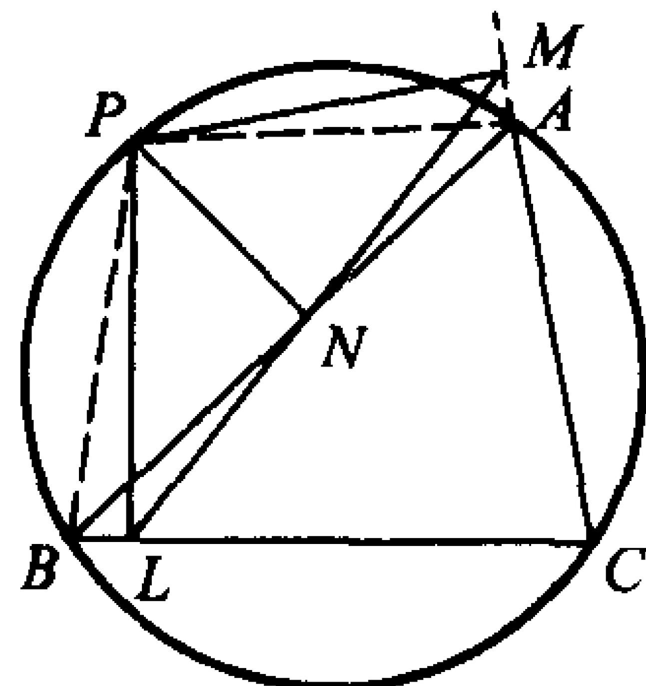


图 4 - 11

分别由 P,B,L,N；P,N,A,M 四点共圆有 $\angle BNL=\angle BPL$，$\angle ANM=\angle APM$.

P,B,C,A 共圆 $\Leftrightarrow\angle PBL=\angle PAM\Leftrightarrow\angle BPL=\angle APM\Leftrightarrow\angle BNL=\angle ANM\Leftrightarrow L,N,M$ 共线.

注　① 定理的必要性即为西姆松定理，充分性即为西姆松定理的逆定理. 西姆松定理将三点共线与四点共圆紧密联系起来.

② 西姆松定理中的垂线可改为等角斜线.

③ 对点 P 也可以推广，对圆内接多边形也可以推广.

例 5　如图 4－12，延长凸四边形 $ABCD$ 的对边 AB 与 DC，AD 与 BC 分别相交于 E、F. 求证：$\triangle BCE$、$\triangle CDF$、$\triangle ADE$、$\triangle ABF$ 的四个外接圆共点.

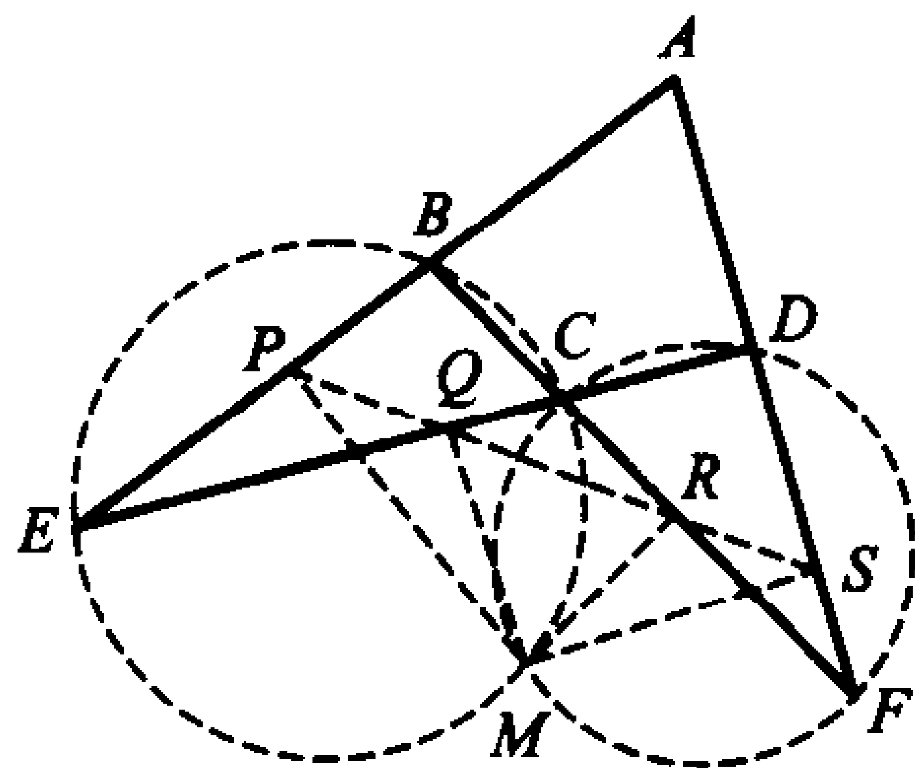


图 4－12

证明　设 $\triangle BCE$ 与 $\triangle CDF$ 的两个外接圆除交于 C 点外，另一交点为 M.

设点 M 在直线 BE、EC、BC 上的射影分别为 P、Q、R，则由西姆松定理，知 P、Q、R 三点共线.

同理，M 点在直线 DC、CF、DF 的射影 Q，R，S 三点也共线，故 P、Q、R、S 四点共线.

在$\triangle ADE$ 中，P 在直线 AE 上，Q 在直线 DE 上，S 在直线 AD 上，且 P、Q、S 共线，则由西姆松定理的逆定理，知点 M 在$\triangle ADE$ 的外接圆.

同理，点 M 在$\triangle ABF$ 的外接圆上. 证毕.

7. **蝴蝶定理**

定理 7　设 AB、CD、EF 是交于$\odot O$ 内一点 M 的三条不同的弦，CF、DE 交 AB 于 P、Q 两点，则 M 平分 AB 的充要条件是 M 平分 PQ.

证明　如图 4－13，连 AC、AF、BD、BE，由$\triangle ACM\backsim\triangle DBM$，$\triangle AFM\backsim\triangle EBM$，$\triangle CFM\backsim\triangle EDM$，有

$$\frac{BD}{AC}=\frac{MD}{MA},\frac{BE}{AF}=\frac{MB}{MF},\frac{ED}{CF}=\frac{ME}{MC}.$$

由 $$\frac{MP}{AP}\cdot\frac{BQ}{MQ}=\frac{S_{\triangle MCF}}{S_{\triangle ACF}}\cdot\frac{S_{\triangle BDE}}{S_{\triangle MDE}}$$

$$=\frac{S_{\triangle MCF}}{S_{\triangle MDE}}\cdot\frac{S_{\triangle BDE}}{S_{\triangle BEA}}\cdot\frac{S_{\triangle BEA}}{S_{\triangle BCA}}\cdot\frac{S_{\triangle BCA}}{S_{\triangle ACF}}$$

$$=\frac{MF\cdot MC}{ME\cdot MD}\cdot\frac{BD\cdot ED}{AB\cdot AE}\cdot\frac{BE\cdot AE}{BC\cdot AC}\cdot\frac{AB\cdot BC}{AF\cdot CF}$$

$$=\frac{MF}{ME}\cdot\frac{MC}{MD}\cdot\frac{BD\cdot BE\cdot ED}{AC\cdot AF\cdot CF}=\frac{MF}{ME}\cdot\frac{MC}{MD}\cdot\frac{MD}{MA}\cdot\frac{MB}{MF}\cdot\frac{ME}{MC}$$

$=\dfrac{MB}{MA}$. 从而

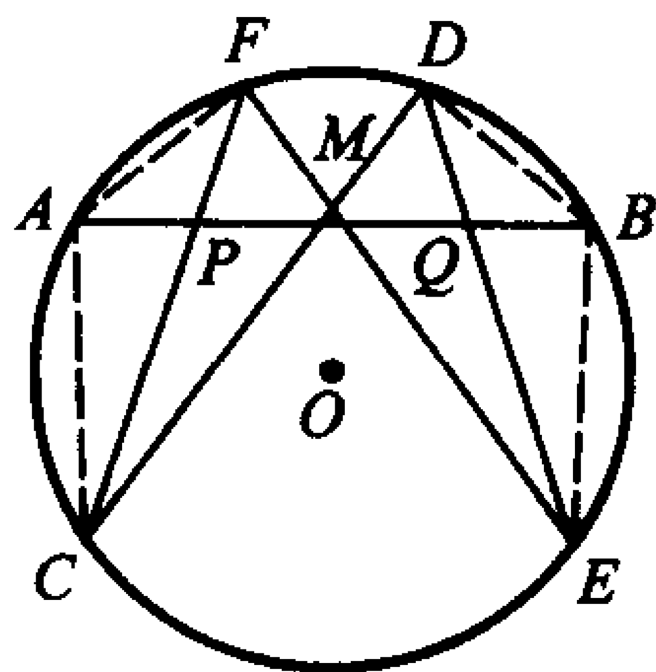


图 4－13

$$MA=MB\Leftrightarrow\frac{MP}{AP}=\frac{MQ}{BQ}\Leftrightarrow\frac{MP}{AM}=\frac{MQ}{BM}\Leftrightarrow MP=MQ.$$

注　① 定理的必要性即为蝴蝶定理，充分性为蝴蝶定理的逆定理. 上述证法是张景中院士给出的.

② 蝴蝶定理的证法很多，1985 年单墫教授给出了极为简练、漂亮且易于推广的如下证法：

以 M 为原点，AB 为 x 轴建立直角坐标系．设圆的方程为：$x^2+(y+m)^2=R^2$，直线 CD，EF 的方程分别为 $y=k_1x$，$y=k_2x$，于是圆和两相交直线组成的二次曲线系为

$$\lambda_1[x^2+(y+m)^2-R^2]+\lambda_2(y-k_1x)(y-k_2x)=0.$$

令 $y=0$，则点 P 和 Q 的横坐标满足方程

$$(\lambda_1+\lambda_2k_1k_2)x^2+\lambda_1(m^2-R^2)=0.$$

由于一次项系数为零，则两根 $x_1+x_2=0$，即 $x_1=-x_2$，故 $PM=QM$.

在上述证明中，若直线 FD、EC 交直线 AB 分别于 T、S，则由 $x_1+x_2=0$，表明 $TM=MS$.

在上述证明中，圆的方程也可换成椭圆、双曲线、抛物线等一般二次曲线方程，从而可将圆中的蝴蝶定理推到了二次曲线中去.

8. 九点圆定理

定理 8　任意三角形三条高的垂足、三边的中点以及垂心与顶点的三条连线的中点，这九点共圆.

证明　如图 4－14，设 AD、BE、CF 为 $\triangle ABC$ 的高，垂心为 H，L、M、N 分别是 BC、CA、AB 的中点，P、Q、R 分别为 AH、BH、CH 的中点.

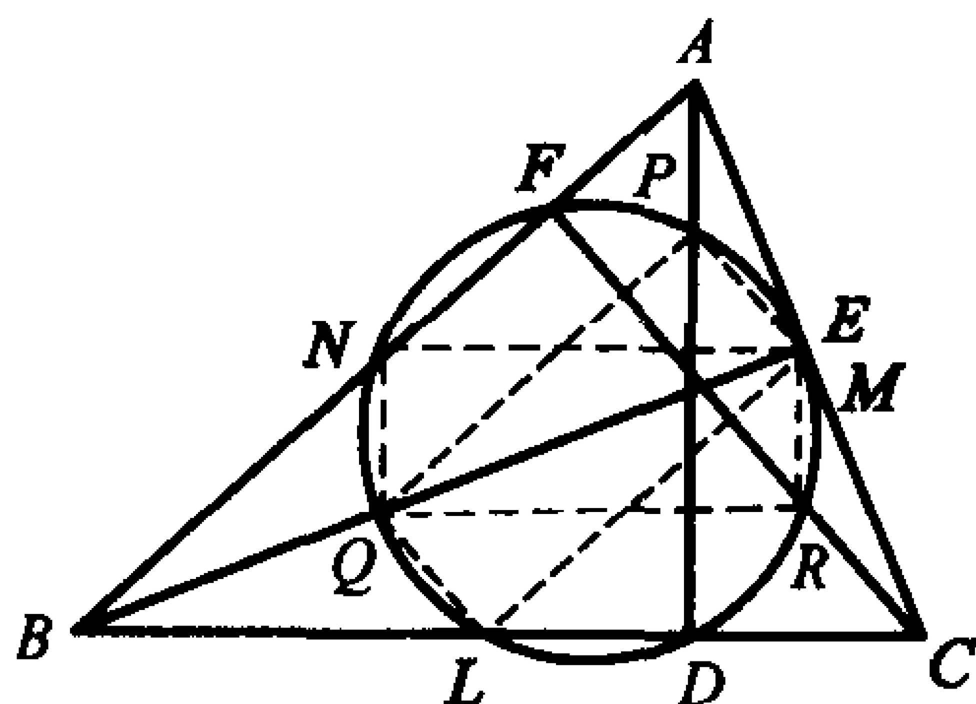


图 4－14

由 $NM\underline{\underline{/\!/}}QR\underline{\underline{/\!/}}\frac{1}{2}BC$，$NQ\underline{\underline{/\!/}}MR\underline{\underline{/\!/}}\frac{1}{2}AH$，而 $AH\perp BC$，从而 $NQRM$ 为矩形．同理，$QLMP$ 为矩形.

于是 QM，LP，NR 是同一个圆的三条直径，故有六点共圆.

又 $\angle PDL=90°$，故点 D 在此圆上．同理 E，F 在此圆上.

故九点共圆.

注　九点圆还有其他许多有趣的性质，如三角形的九点圆圆心为垂心 H 与外心 O 连线的中点，其半径为 $\triangle ABC$ 外接圆半径的 2 倍；三角形的九点圆与内切圆内切且与三个旁切圆外切等等．当人们第一次看到九点圆时，一定会为它的优雅所征服，会认为这是一个神奇的巧合！后来，关于九点圆，人们还有更多的发现．某位权威的几何学家指出："在九点圆上，至少还有 43 个奇特点！"研究九点圆所发现的新的成果，足以编一本厚书，制作出一个小小的数学工业.

由九点圆定理，我们得到三角形外心、垂心、重心及九点圆圆心共线的重要结论：

四心共线定理　三角形的外心、垂心、重心、九点圆圆心共线；且九点圆圆心

在外心与垂心连线的中点，重心在外心与垂心的三分点处.

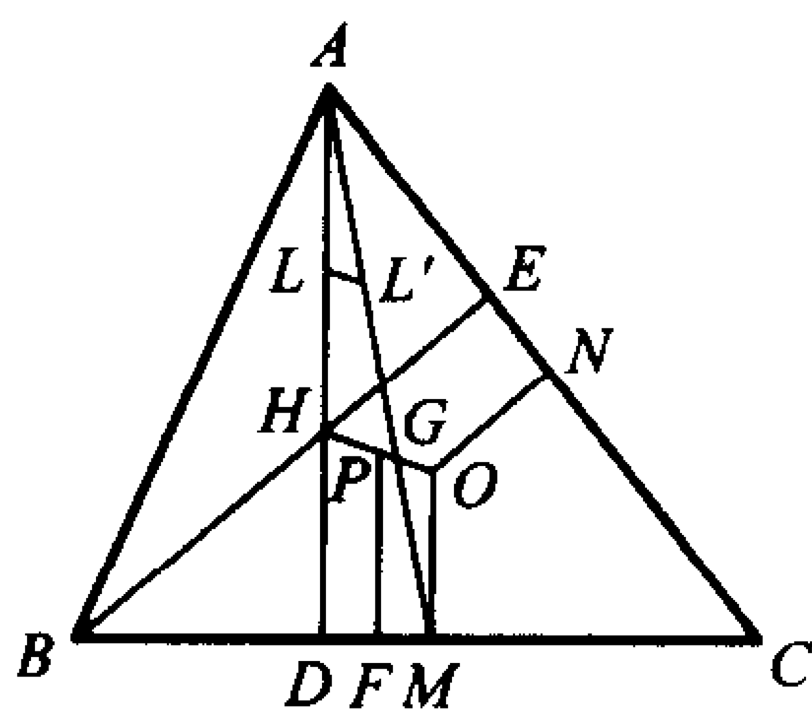


图 4-15

证明 如图 4-15，分别过边 BC 之中点 M 和 AC 之中点 N，作垂线交于 O，则 O 为外心. 设 H 为垂心，作 $AH\perp BC$ 于 D，作 DM 的中垂线 PF 交 OH 于 P. 由于 $MO/\!/FP/\!/DH$，所以 P 是 OH 的中点.

同理 AC 边上的中点 N 与 H 在 AC 上的射影 E 之间的中垂线也交 OH 于中点 P，故 P 为九点圆圆心.

设 G 是 $\triangle ABC$ 的重心，则 G 在 AM 和 BN 的 $\frac{2}{3}$ 点处. 连 OG 并延长交 AD 于 Q，取 AG 的中点 L'，AH 的中点 L，则 $\triangle AL'L\cong\triangle MGO$，故 $LL'=OG=\frac{1}{2}GQ$.

同理 OG 的延长线与 BE 的交点 K 也具有此性质：$LL'=\frac{1}{2}GK$，故 K 与 Q 重合. 这重合点（Q 和 K）自然是 AD 与 BE 的交点 H，故 O,G,P,H 四心共线.

由于 $PH=\frac{1}{2}OH$，$OG=\frac{1}{2}GH$，于是结论获证.

习 题 4.1

1. 在 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=2\angle B$，P 为 $\triangle ABC$ 内满足条件 $PA=AC$ 及 $PB=PC$ 的一个点. 求证：AP 是 $\angle A$ 的三等分线.

2. 凸四边形 $ABCD$ 中，$\angle ABC=60°$，$\angle BAD=\angle BCD=90°$，$AB=2$，$CD=1$，对角线 AC、BD 交于点 O. 求 $\sin\angle AOB$.

3. 设 P 为 $\triangle ABC$ 的外接圆上一点，分别作 $PA'\perp BC$ 交圆于 A'，作 $PB'\perp AC$ 交圆于 B'，作 $PC'\perp AB$ 交圆于 C'. 求证：$AA'/\!/BB'/\!/CC'$.

第二节 几个著名不等式

1. 波利亚—蔡戈不等式

波利亚—蔡戈(Polya-Szegö)不等式 设 $\triangle ABC$ 的三边边长及面积分别为 a,b,c 和 $S_\triangle$，则有

$$S_\triangle\leqslant\frac{\sqrt{3}}{4}(abc)^{\frac{2}{3}}.\qquad(4-6)$$

这个不等式是波利亚和蔡戈在《数学分析中的问题和定理》一书中给出的.

由式(4－6),运用三个正数的算术—几何平均值不等式,则可推出三角形的等周不等式:

$$S_{\triangle}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{36}(a+b+c)^2. \qquad (4-7)$$

式(4－6)也可以推广到四边形中去.若设 a,b,c,d 和 S_{ABCD} 分别表示四边形 $ABCD$ 的各边长及面积,则

$$S_{ABCD}\leqslant(abcd)^{\frac{1}{2}}. \qquad (4-8)$$

$$S_{ABCD}\leqslant\frac{1}{6}(ab+ac+ad+bc+bd+cd). \qquad (4-9)$$

注　式(4－8)证明见《数学通讯》1987(6)陈计的文章;

式(4－9)证明见《数学通讯》1988(4)苏化明的文章;

式(4－6)还可以推广到四面体中去:设四面体 $ABCD$ 的6条棱长为 a_1,a_2,…,a_6,其外接球半径为 R,体积为 V,则有

$$V\leqslant\frac{\sqrt{3}}{24R}\left(\prod_{i=1}^{6}a_i\right)^{\frac{2}{3}}, \qquad (4-10)$$

$$V\leqslant\frac{1}{72}\left(\prod_{i=1}^{6}a_i\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (4-11)$$

注　(4－10)式的证明见《数学通报》1981(6)杨路的文章;(4-11)式的证明见《数学通报》1984(12)赵何成的文章.

2. 埃道什—莫迪尔不等式

埃道什—莫迪尔(Erdös-Mordell)不等式　设 P 为△ABC 内部或边上一点,P 到三边 BC,CA,AB 的距离分别为 PD,PE,PF,则

$$PA+PB+PC\leqslant 2(PD+PE+PF). \qquad (4-12)$$

这个不等式是由匈牙利数学家埃道什于1935年提出,1937年由英格兰数学家莫迪尔第一个证明了这个不等式,后人称这个不等式为埃道什—莫迪尔不等式.

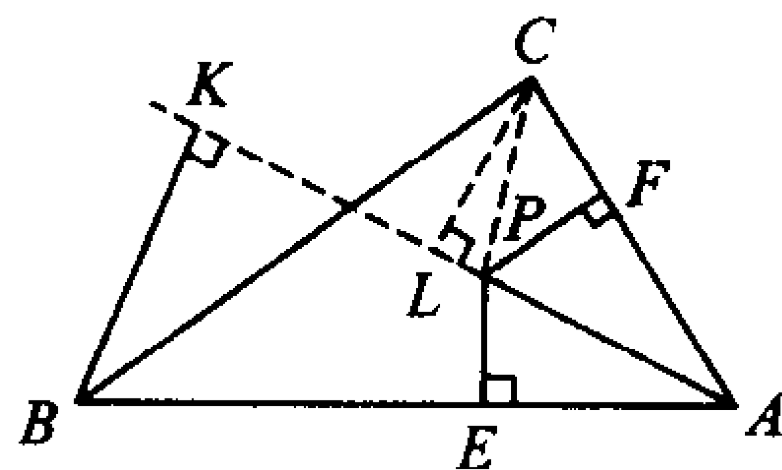


图4－16

为了证明这个不等式,我们先看一个引理:设 P 为△ABC 内部或 BC 边上的任一点,P 到 AB,AC 的距离分别为 PE,PF(如图4－16),则

$$PA\cdot BC\leqslant PE\cdot AB+PF\cdot AC.$$

事实上,可由点 B 和 C 向直线 AP 引垂线 BK,CL,垂足分别为 K 和 L.显然 $BK+CL\leqslant BC$,从而

$$\frac{1}{2}BC\cdot AP\geqslant\frac{1}{2}BK\cdot AP+\frac{1}{2}CL\cdot AP=S_{\triangle ABP}+S_{\triangle ACP}$$

$$=\frac{1}{2}AB\cdot PE+\frac{1}{2}AC\cdot PF,$$

故 $PA\cdot BC\geqslant PE\cdot AB+PF\cdot AC$.

下面回到原问题的证明：对于 P 点关于 $\angle A$ 的平分线的对称点，运用引理，有

$$PA\geqslant\frac{AB}{BC}\cdot PF+\frac{AC}{BC}\cdot PE.$$

同理，$PB\geqslant\frac{AB}{AC}\cdot PD+\frac{BC}{AC}\cdot PE$，$PC\geqslant\frac{BC}{AB}\cdot PF+\frac{AC}{AB}\cdot PD$. 从而

$$\begin{aligned}PA+PB+PC&\geqslant\left(\frac{AB}{AC}+\frac{AC}{AB}\right)PD+\left(\frac{AC}{BC}+\frac{BC}{AC}\right)PE+\left(\frac{AB}{BC}+\frac{BC}{AB}\right)\cdot PF\\&\geqslant 2PD+2PE+2PF\\&=2(PD+PE+PF).\end{aligned}$$

因为三角形 ABC 的形状是任意的，点 P 的选取也是任意的，因此，这个不等式是很强的，由它可以推导出许多新的不等式.

这个不等式也可以推广到凸多边形中去.

设 $n\geqslant 3$，点 P 为凸 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 内的任意一点，$PB_1, PB_2, \cdots, PB_n$ 分别为点 P 到 n 条边 $A_1A_2, A_2A_3, \cdots, A_nA_1$ 的距离，则 $\sum\limits_{i=1}^{n}PA_i\geqslant\sec\frac{\pi}{n}\cdot PB_i$.

$$(4-13)$$

而且，对任意正数序列 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，都有

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i PA_i\geqslant\sec\frac{\pi}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\lambda_i\lambda_{i+1}}PB_i. \qquad (4-13')$$

注 (4-13)式与(4-13′)式的证明可参见《数学通讯》1984(8)简超的文章.

类似于(4-12)式，有如下优美的不等式：

设$\triangle ABC$ 的三边长为 a, b, c，P 为平面上任一点，则

$$a\cdot PA^2+b\cdot PB^2+c\cdot PC^2\geqslant abc, \qquad (4-14)$$

或

$$PA^2\cdot\sin A+PB^2\cdot\sin B+PC^2\cdot\sin C\geqslant 2S_{\triangle}, \qquad (4-14')$$

其中等号当且仅当 P 为$\triangle ABC$ 的内心时取得.

(4-14)式的证明可参见《数学通讯》1988(9)刘健的文章. 该文还将(4-14′)推广到：当 $n\geqslant 4$ 的凸边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 中去：

$$\sum_{i=1}^{n}PA_i^2\cdot\sin A_i\geqslant 2S_{A_1A_2\cdots A_n}. \qquad (4-15)$$

其中等号当且仅当 $A_1A_2\cdots A_n$ 为正 n 边形且 P 为其中心时取得.

3. 外森比克不等式和芬斯勒—哈德维格不等式

1919年，著名几何学家外森比克(R. Weitzenboke)提出并证明了以下不等式：

外森比克不等式　设$\triangle ABC$的边长和面积分别为a,b,c和$S_{\triangle}$，则

$$a^2+b^2+c^2\geqslant 4\sqrt{3}S_{\triangle}, \tag{4-16}$$

其中等号当且仅当$\triangle ABC$为正三角形时取得.

证明　令$p=\frac{1}{2}(a+b+c)$，则由海伦公式$S_{\triangle}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$及平均值不等式，有$(p-a)(p-b)(p-c)\leqslant\left[\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{3}\right]^3=\left(\frac{p}{3}\right)^3$.

所以　$S_{\triangle}\leqslant\sqrt{p\left(\frac{p}{3}\right)^3}=\frac{p^2}{3\sqrt{3}}$.

因为$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+(ab+bc+ca)\leqslant 3(a^2+b^2+c^2)$，

故　$S_{\triangle}\leqslant\frac{p^2}{3\sqrt{3}}=\frac{(a+b+c)^2}{12\sqrt{3}}\leqslant\frac{a^2+b^2+c^2}{4\sqrt{3}}$,

即　$a^2+b^2+c^2\geqslant 4\sqrt{3}S_{\triangle}$.

注　苏化明在《数学竞赛》第12辑(湖南教育出版社，1992年)中另给出了(4-16式)的24种证法.

单墫教授在《几何不等式》一书中介绍了(4-16)的下述加权推广：

设$\triangle ABC$的边长和面积分别为a,b,c和$S_{\triangle}$，对于任意正数$\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$，有

$$\lambda_1a^2+\lambda_2a^2+\lambda_2c^2\geqslant 4\sqrt{\lambda_1\lambda_2+\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1}S_{\triangle}, \tag{4-17}$$

其中等号当且仅当$a:b:c=\sqrt{\lambda_2+\lambda_3}:\sqrt{\lambda_1+\lambda_3}:\sqrt{\lambda_1+\lambda_2}$时取得.

1938年，芬斯勒(P. Finsler)和哈德维格(Hadwiger)加强了外森比克不等式，提出并证明了下面的不等式：

芬斯勒—哈德维格不等式　设$\triangle ABC$的边长分别a,b,c和面积$S_{\triangle}$，则

$$a^2+b^2+c^2\geqslant 4\sqrt{3}S_{\triangle}+(a-b^2)+(b-c)^2+(b-c)^2+(c-a)^2. \tag{4-18}$$

其中等号当且仅当$\triangle ABC$是正三角形时取得.

证明　设$x=p-a, y=p-b, z=p-c$，则

$$\begin{aligned}&[a^2-(b-c)^2]+[b^2-(a-c)^2]+[c^2-(a-b)^2]\\&=4(p-b)(p-c)+4(p-a)(p-c)+4(p-a)(p-b)\\&=4(yz+zx+xy),\end{aligned}$$

并且$4\sqrt{3}S_{\triangle}=4\sqrt{3p(p-a)(p-b)(p-c)}=4\sqrt{3(x+y+z)xyz}$.

于是，需要证明　$xy+yz+xz\geqslant\sqrt{3(x+y+z)xyz}$.

两边平方，化简，只需证$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\geqslant x^2yz+y^2xz+z^2xy$.

而$\frac{1}{2}x^2(y^2+z^2)\geqslant x^2yz$，$\frac{1}{2}y^2(x^2+z^2)\geqslant y^2xz$，$\frac{1}{2}z^2(x^2+y^2)\geqslant z^2xy$.

以上三个不等式相加，即可得 $x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\geqslant x^2yz+y^2xz+z^2xy$.

其中等号当 $x=y=z$ 即 $a=b=c$ 时取得.

式(4-18)可以推广到凸边形中去：

设 $a_1,a_2\cdots,a_n$ 为凸 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的 n 条边长，$S_{A_1\cdots A_n}$ 为其面积，则

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^2\geqslant 4\tan\frac{\pi}{n}\cdot S_{A_1\cdots A_n}+\frac{1}{n}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i)^2, \qquad (4-19)$$

其中等号当且仅当 $A_1A_2\cdots A_n$ 为正 n 边形时取得.

注 式(4-19)的证明可参见《中学数学教学》1984(6)陈远利的文章.

类似于(4-19)式，对于实数 $m<0$ 或 $m>1$，有

$$\sum_{i=1}^{n}a_i^m\geqslant n\left(\frac{4}{n}\cdot\tan\frac{\pi}{n}\cdot S_{A_1\cdots A_n}\right)^{\frac{m}{2}}, \qquad (4-20)$$

其中等号当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时取得.

注 (4-20)的证明可参见《数学通讯》1988(1)王方汉的文章.

在式(4-20)中，取 $m=-2$，便得(4-16)式的对偶式：

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geqslant\frac{3\sqrt{3}}{4S_\triangle}. \qquad (4-21)$$

同样，也有(4-18)式的对偶式

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\geqslant\frac{3\sqrt{3}}{4S_\triangle}+\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)^2+\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)^2. \qquad (4-22)$$

注 式(4-22)的证明可参见《数学通讯》1987(12)陈计的文章.

式(4-18)也可以推广到 n 维空间中，这可见《湖南师范大学学报》(自然科学版)1992(4)杨世国和沈文选的文章.

4. 纽堡—匹多不等式

1891 年，纽堡(J. Newberg)提出一个涉及两个三角形的边长和面积的不等式. 1942 年，美国著名几何学家匹多(D. Pedoe)重新发现并证明了这个不等式.

纽堡—匹多不等式 设$\triangle A_1A_2A_3$ 和$\triangle B_1B_2B_3$ 的边长和面积分别是 a_1、a_2、a_3、S_a 和 b_1、b_2、b_3、S_b，则

$$a_1^2(-b_1^2+b_2^2+b_3^2)+a_2^2(b_1^2-b_2^2+b_3^2)+a_3^2(b_1^2+b_2^2+b_3^2)\geqslant 16S_a\cdot S_b. \qquad (4-23)$$

上述不等式稍加变形，可发现它等价于不等式

$$16S_aS_b\leqslant(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2)-2(a_1^2b_1^2+a_2^2b_2^2+a_3^2b_3^2)b_1^2. \qquad (4-24)$$

下面我们证明式(4-24)：

事实上，由海伦公式有 $16S_a^2=(a_1^2+a_2^2+a_3^2)^2-2(a_1^4+a_2^4+a_3^4)$.

于是，由柯西不等式，有

$$
\begin{aligned}
&16S_aS_b+2(a_1^2b_1^2+a_2^2b_2^2+a_3^2b_3^2)\\
\leqslant\ &16S_aS_b+\sqrt{2(a_1^4+a_1^4+a_3^4)}\cdot\sqrt{2(b_1^4+b_2^4+b_3^4)}\\
=\ &(4S_a)\cdot(4S_b)+\sqrt{2(a_1^4+a_2^4+a_3^4)}\cdot\sqrt{2(b_1^4+b_2^4+b_3^4)}\\
\leqslant\ &\sqrt{[16S_a^2+2(a_1^4+a_2^4+a_3^4)][16S_b^2+2(b_1^4+b_2^4+b_3^4)]}\\
=\ &(a_1^2+a_2^2+a_3^2)(b_1^2+b_2^2+b_3^2),
\end{aligned}
$$

其中等号当且仅当 $S_a:S_b=a_1^2:b_1^2=a_2^2:b_2^2=a_3^2:b_3^2$，即$\triangle A_1A_2A_3\backsim\triangle B_1B_2B_3$时取得.

1979 年，常庚哲教授介绍了这个不等式，并给出一个复数证明. 自此之后，我国有许多数学工作者，对这个不等式作了各种各样的推广：加权推广、多边形推广、n 维推广等等，以至掀起了一股凸体几何研究的热潮. 这可参见《中国初等数学研究》（李炯生、黄国勋主编，科学技术文献出版社，1992 年出版）、《几何不等式在中国》（单墫主编，江苏教育出版社，1996 年出版）和《单形论导引——三角形的高维推广研究》（沈文选著，湖南师范大学出版社，2000 年出版）.

习 题 4.2

1. 给出三角形等周不等式(4－7)的证明.
2. 给出外森比克不等式(4－16)的几种证法.

第五章　平面几何问题的证明

学习几何，离不开几何证明. 所谓证明一个几何题，就是从所给前提出发，利用定义、公理和已知定理推出欲证明的结论.

第一节　证题的一般思路

几何证明，方法甚多，形式多样，研究的内容非常丰富. 而研究证题的一般思路，探索证题过程的数学思维，总结证题的一般规律，是几何证明研究的重点内容. 证题的一般思路常有试悟式思路与顿悟式思路.

试悟式思路，就是证题时，首先仔细考察题目的特征、审查理解题意，分清条件和结论，尽量发掘题目中涉及的一些概念的内涵，在细致周密的考察的基础上，尝试展开丰富的联想（如接近联想、类似联想、对比联想、特征联想等），以求唤起对有关旧知识的回忆，开启思维的大门，尝试能否借助于旧经验来解决面临的新问题，考虑这个问题能否归结为某种我们已熟悉其证法的类型，向那种类型靠拢. 如果把问题直接归结为某种类型还有困难，就尝试对问题的条件或结论作某些变更使其转化为某种类型. 如果在转化过程中碰到某些障碍，缺乏某些因素，就尝试引入辅助量或作辅助线、图来进行沟通，找到解决问题的转机，并纠正尝试中的错误，最后获得原问题的证明.

顿悟式思路，就是证题时，一下子不能马上寻找到它的证明思路，但当通过有选择地带着形象识别的眼光反复地分析它，通过动员和组织、分离和整合题目中已知的信息，辨认和联想题中的各种因素时，则可在经过一系列的“脑风暴”后，在某一其他因素或其他问题的激发下，或运用直觉想像，突然在脑子中形成一个念头或闪现出对证题的提示，从而顿时获得简捷而优美的证题思路.

试悟式思路，又常分为直接式与间接式.

由命题的题设出发，根据定义、公理、定理进行一系列正面的逻辑推理，最后得出命题的证明，这种证题思路称为直接式思路. 由于思维过程的顺逆，我们在证题时运用的方法常有“综合法”与“分析法”之分. 综合法是由命题的题设条件入手，由因导果，通过一系列的正确推理，逐步靠近目标，最终证明出结论；分析法则由命题的结论入手，承认它是正确的话，执果索因，寻求在什么情况下结论是正确的. 这样一步一步逆而推之，直到与假设条件汇合，于是获得由假设条件

通往结论的思维过程．具体证题时，有时是两种方法的配合运用或单独运用．

有些命题，往往不易甚至不能直接证明，这时，不妨证明它的等效命题，间接地达到目的，这种证题思路称为间接式思路．我们常运用的反证法、同一法证题就是两种典型的间接式思路证题方法．

用间接思路证明命题，是构作一个等效命题来证，有一种方法是构作并证这个命题的逆否命题成立．具体说来，由否定该命题结论的正确性出发，根据题设条件、定义、公理、定理，进行一系列正确的推理，最后得出一个矛盾的结果（与命题的假设、某个公理或定理矛盾，或自相矛盾等），这就表明结论的反面不能成立，从而可以肯定结论的正确性．这种驳倒反面的证法，叫做反证法．当结论的反面只有一款时，否定了这一款便完成证明．这种较单纯的反证法又叫做归谬法；当结论的反面有若干款时，必须驳倒其中每一款，这种较繁的反证法又称为穷举法．

当欲证某图形具有某种性质而又比较繁杂或不易直接证明时，有时可以作出具有所示性质的图形，然后证明所作的图形跟所给的某图形就是同一个，把它们等同起来．这种证法叫做同一法．能用同一法证明的命题，实际上是依据这样一件事实：具有所示性质的图形是唯一的．

证题过程，不论是直接思路还是间接思路，都要进行一系列正确推理．推理常有演绎推理和合情推理．由一般规律推导出特殊事项的推理称之为演绎推理．几何证明中的推理，用的就是演绎推理．如果根据观察试验分析，融直觉、灵感与逻辑于一体而得到一种可能性的推理称之为合情推理．常用的合情推理形式有归纳、类比等．合情推理在几何证明分析中发挥着重要作用．

例 1　试证：如图 5－1，如果$\odot O_1$，$\odot O_2$，$\odot O_3$具有相等的半径 R，并通过同一点 M 外，还两两相交于 A，B，C，则$\triangle ABC$ 的外接圆半径也等于 R．

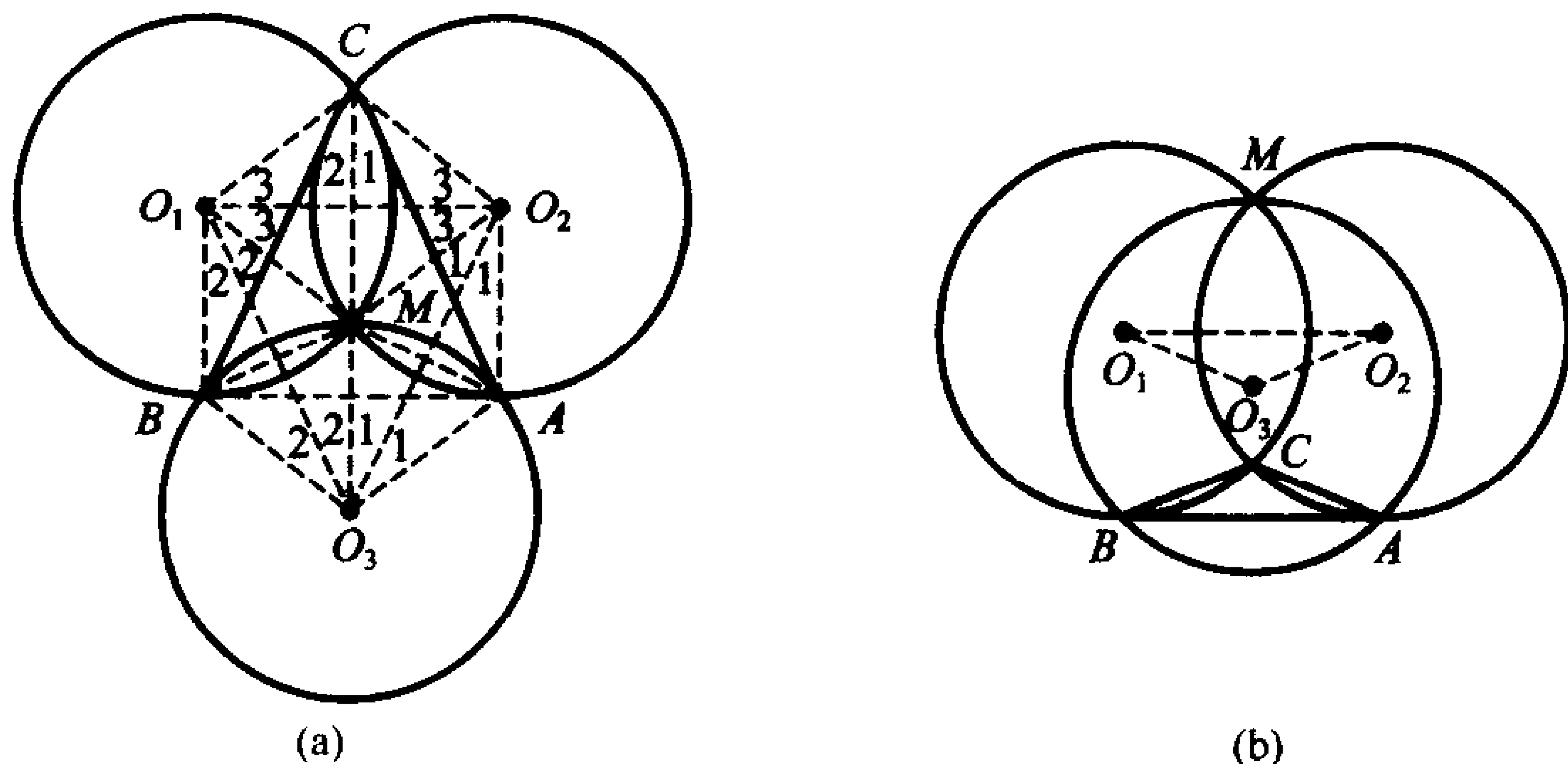


图 5－1

题设图形有两种情况，我们仅对图 5－1(a)的情况给出试悟式证题思路的综合法和同一法证法及顿悟式思路证法等三种证法．

证法 1　对于图中 7 点的两两连接，则知 AO_2MO_3，BO_1MO_3，CO_1MO_2 分别为菱形. 利用菱形性质及圆心角与同弧上圆周角的关系，用 $\angle 1$，$\angle 2$，$\angle 3$ 标上相等的角如图，则 $\angle ACB=\angle 1+\angle 2=\angle O_1O_3O_2$，

$$\angle BAC=\angle 2+\angle 3=\angle O_2O_1O_3,$$
$$\angle ABC=\angle 1+\angle 3=\angle O_1O_2O_3.$$

在 $\triangle MO_2O_3$ 中，$O_2O_3^2=2R^2-2R^2\cdot\cos(180°-2\angle 1)$.

在 $\triangle O_1BC$ 中，$BC^2=2R^2-2R^2\cdot\cos(2\angle 2+2\angle 3)$.

而在 $\triangle O_1O_2O_3$ 中，$\angle O_2O_1O_3=\angle 2+\angle 3=180°-\angle O_1O_2O_3-\angle O_1O_3O_2=180°-(\angle 1+\angle 2)-(\angle 1+\angle 3)=180°-2\angle 1-(\angle 2+\angle 3)$，从而 $180°-2\angle 1=2\angle 2+2\angle 3$ 于是 $BC=O_2O_3$.

同理，$AB=O_1O_2$，$AC=O_1O_3$，则 $\triangle ABC\cong\triangle O_1O_2O_3$.

$\triangle O_1O_2O_3$ 的外接圆以 M 为圆心，半径为 R. 故 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R.

证法 2　作 $\odot O_2$ 关于 AC 对称的 $\odot O$，则 $\odot O$ 的半径为 R，且点 M 关于 AC 的对称点 M' 在 $\odot O$ 上. 设 $\odot O$ 交直线 AB 于 B'，下证 B' 与 B 重合：

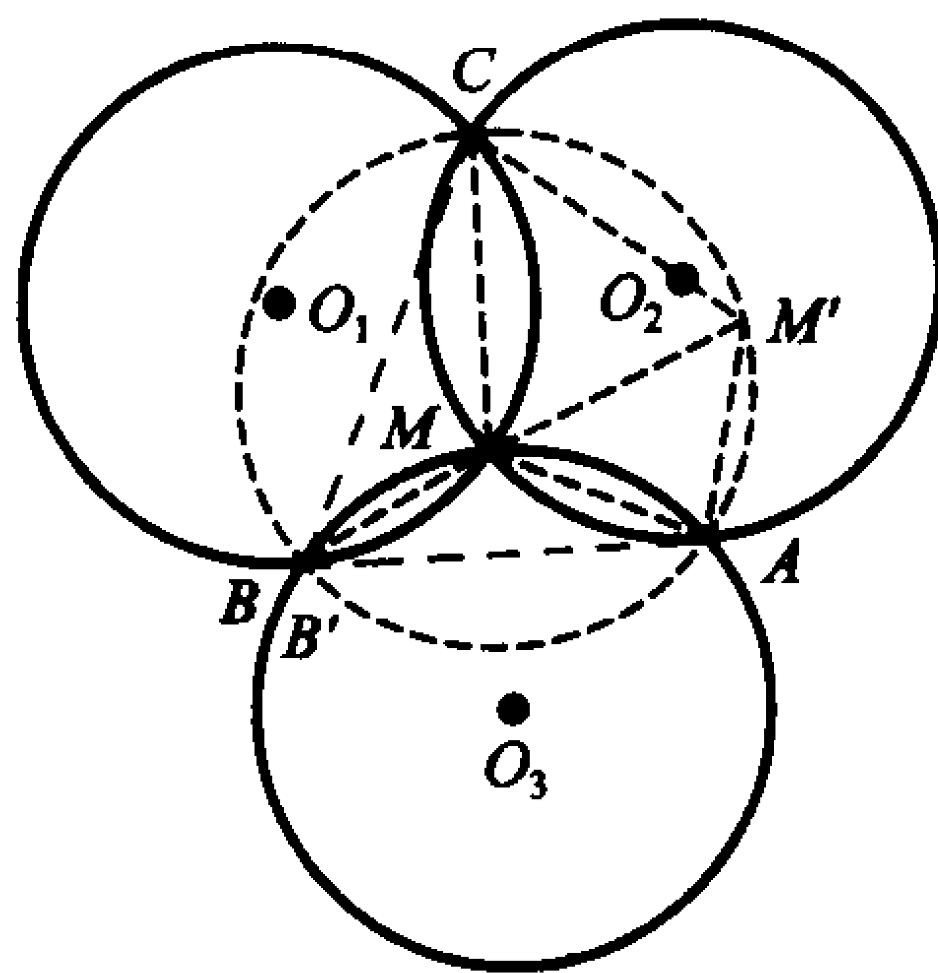


图 5－2

连 MA，MB，MC，CB'，AB'，则 $\angle AB'C+\angle AM'C=180°$.

而 $\angle ABC=\angle ABM+\angle MBC \overset{m}{=} \frac{1}{2}\overset{\frown}{AM}+\frac{1}{2}\overset{\frown}{CM}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{CMA}=\frac{1}{2}(360°-\overset{\frown}{AlC})=180°-\frac{1}{2}\overset{\frown}{AlC}\overset{m}{=}180°-\angle AMC=180°-\angle AM'C$，即 $\angle ABC+\angle AM'C=180°$. 从而 B' 与 B 重合，故 $\triangle ABC$ 的外接圆就是 $\odot O$，从而其半径为 R.

证法 3　在图 5－1 中，有选择地带着形象识别的眼光反复地分析这个图形，如果看到九条线段 AO_2，AO_3，BO_1，BO_3，CO_1，CO_2，MO_1，MO_2，MO_3 所组成的三个四边形是两两相邻接的菱形，它使我们想起一些熟悉的图形. 若把 N 点也画成另三个两两邻接菱形交点，这时立体几何中的平行六面体的形象会出乎意料地“跳”出来，它使我们突然领悟（顿悟）到证题的途径. 如图 5－3，点 N 就是到三点 A，B，C 的距离均为 R 的点，在平面内，N 为 $\triangle ABC$ 的外接圆圆心，从而 $\triangle ABC$ 的外接圆半径也为 R.

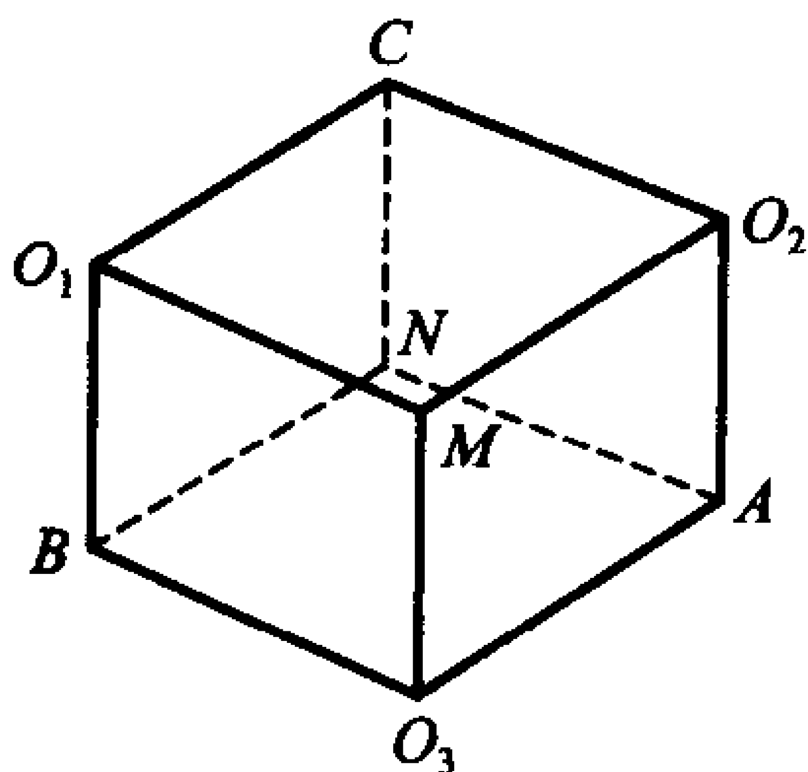


图 5－3

在平面几何证题中，综合法是运用得比较多的证法. 深入发掘题设内涵，从

各种不同的角度应用已知条件，可以导致各种不同的综合证法.

例 2　设点 I,H 分别为锐角$\triangle ABC$的内心和垂心，点 B_1,C_1 分别为边 AC，AB 的中点. 已知射线 B_1I 交边 AB 于点 $B_2(B_2\neq B)$，射线 C_1I 交 AC 的延长线于点 C_2，B_2C_2 与 BC 相交于 K，A_1 为$\triangle BHC$的外心. 试证：A,I,A_1 三点共线的充分必要条件是$\triangle BKB_2$和$\triangle CKC_2$的面积相等.

此例的证明应灵活运用综合法证明两个充分必要条件.

首先证明：A,I,A_1 三点共线$\Leftrightarrow\angle BAC=60°$.

证法 1　如图 5-4，连结 BA_1,CA_1，则$\angle BHC=180°-\angle BAC$，$\angle BA_1C=2(180°-\angle BHC)=2\angle BAC$. 因此，$\angle BAC=60°\Leftrightarrow\angle BAC+\angle BA_1C=180°$

$\Leftrightarrow A_1$ 在$\triangle ABC$的外接圆上$\Leftrightarrow AI$ 与 AA_1 重合

$\Leftrightarrow A,I,A_1$ 三点共线.

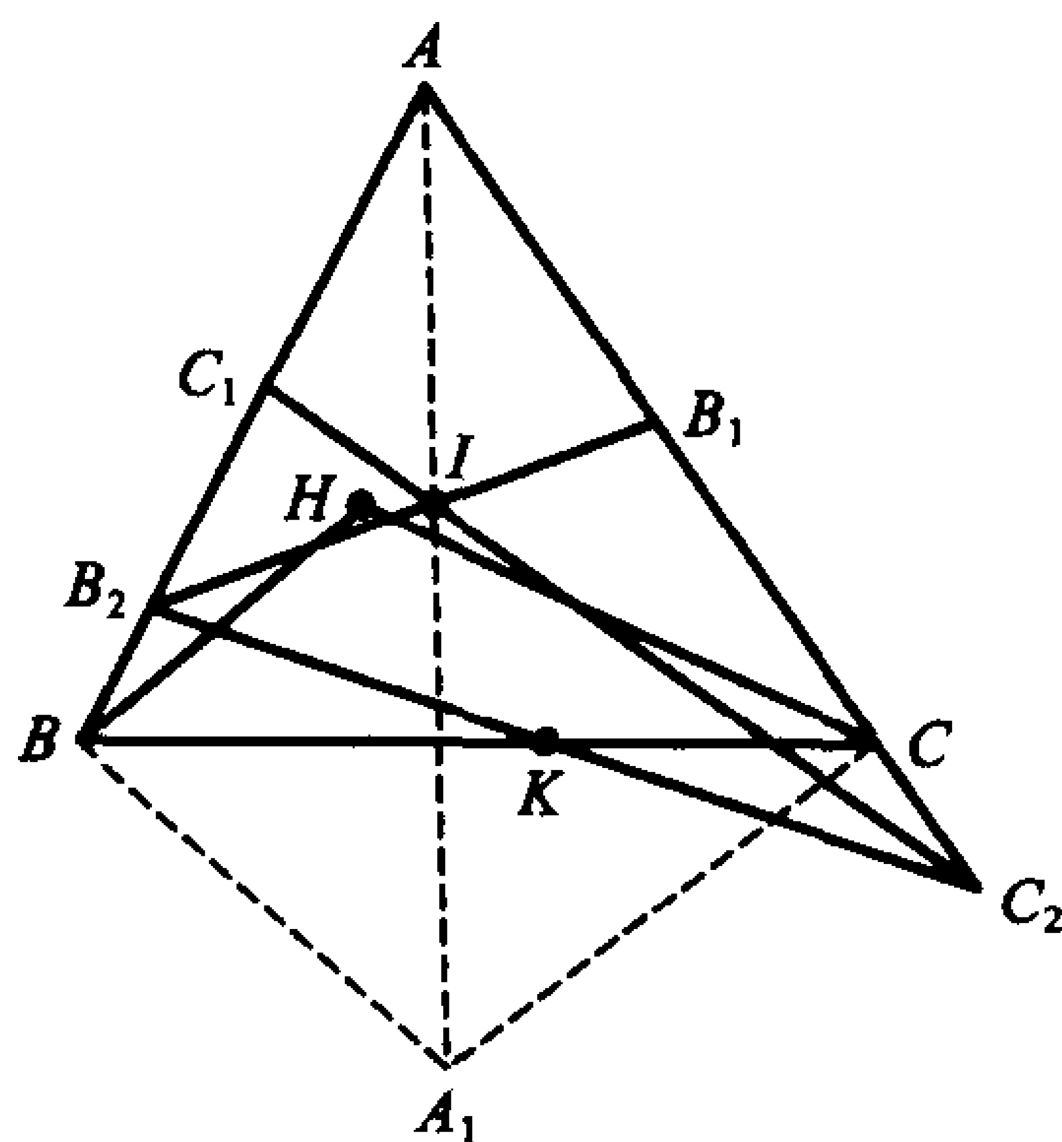


图 5-4

证法 2　在$\triangle ABA_1$和$\triangle ACA_1$中，运用正弦定理，有 $\dfrac{A_1A}{\sin\angle ABA_1}=\dfrac{A_1B}{\sin\angle A_1AB}$，$\dfrac{A_1A}{\sin\angle ACA_1}=\dfrac{A_1C}{\sin\angle A_1AC}$.

因 $A_1B=A_1C_1$，且 I 为$\triangle ABC$的内心，则 A,I,A_1 共线$\Leftrightarrow\angle A_1AB=\angle A_1AC$

$\Leftrightarrow\angle ABA_1$ 与$\angle ACA_1$ 均为三角形内角时，$\sin\angle ABA_1=\sin\angle ACA_1$

$\Leftrightarrow\angle ABA_1\neq\angle ACA_1$（因 $AB\neq AC$）时，$\angle ABA_1+\angle ACA_1=180°$

$\Leftrightarrow A,B,A_1,C$ 四点共圆.

注意到在$\odot A_1$ 中圆周角与圆心角的关系，有

$\angle BA_1C=360°-2\angle BHC=360°-2(180°-\angle BAC)=2\angle BAC$，且

$\angle BA_1C+\angle BAC=180°\Leftrightarrow\angle BAC=60°$.

证法 3　由题设知 A_1 在$\triangle ABC$外，如图 5-5. A_1 为$\triangle BHC$的外心，有$\angle A_1BC=\angle A_1CB=90°-\dfrac{1}{2}\angle BA_1C=90°-\dfrac{1}{2}(360°-2\angle BHC)=\angle BHC-90°=90°-\angle BAC$.

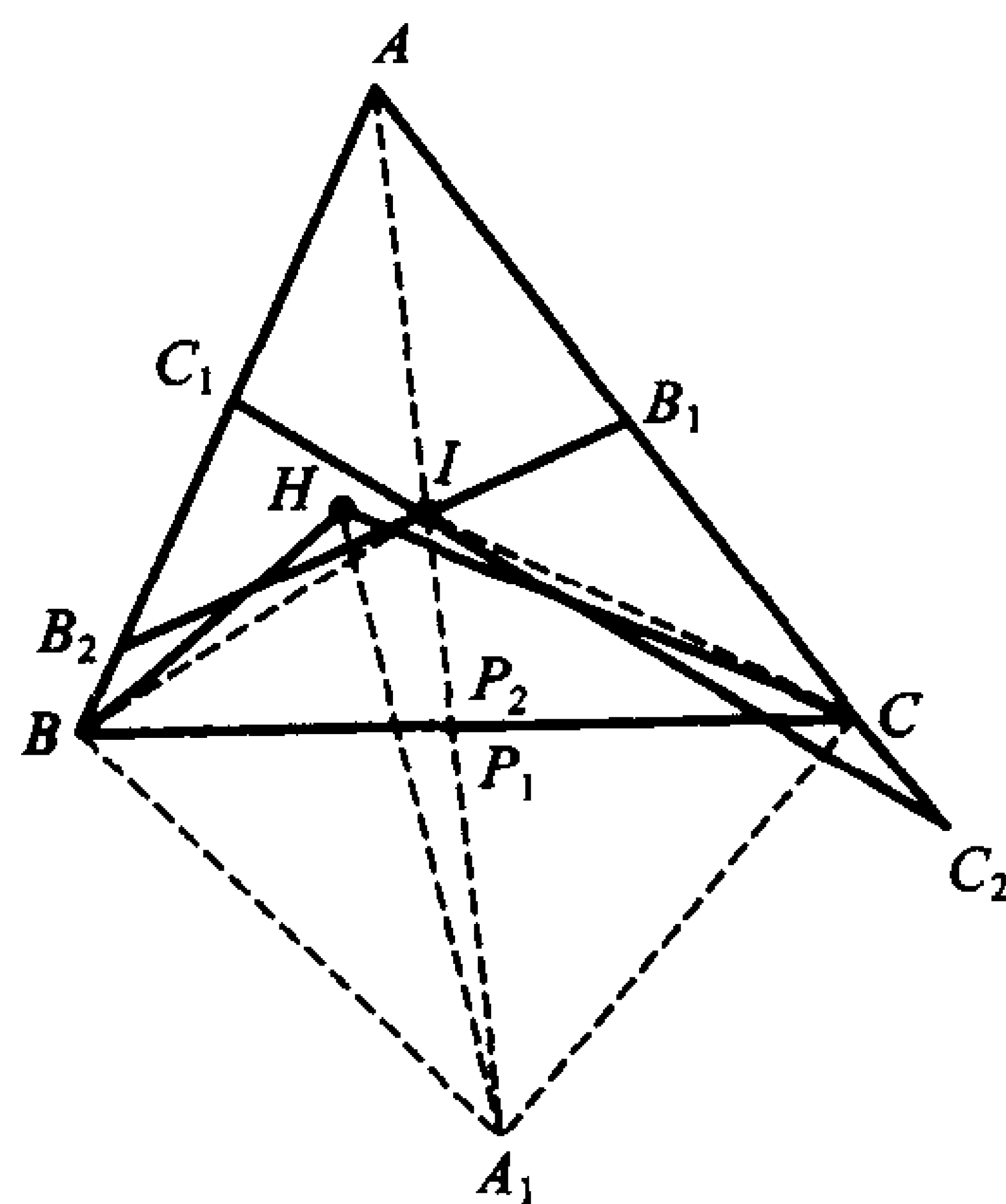


图 5-5

又 I 为$\triangle ABC$的内心，有$\angle IBA_1=\dfrac{\angle ABC}{2}$

$+90°-\angle BAC$. $\angle ICA_1=\frac{\angle ACB}{2}+90°-\angle BAC$.

延长 AI 交 BC 于 P_1，连 IA_1 交 BC 于 P_2，则

$$\frac{BP_2}{P_2C}=\frac{S_{\triangle BIA_1}}{S_{\triangle ICA_1}}=\frac{BI\cdot BA_1\cdot\sin\angle IBA_1}{CI\cdot CA_1\cdot\sin\angle ICA_1}=\frac{\sin\frac{\angle ACB}{2}\cdot\cos\left(\frac{\angle ABC}{2}-\angle BAC\right)}{\sin\frac{\angle ABC}{2}\cdot\cos\left(\frac{\angle ACB}{2}-\angle BAC\right)}.$$

又由角平分线性质及正弦定理，有

$$\frac{BP_1}{P_1C}=\frac{AB}{AC}=\frac{\sin\angle ACB}{\sin\angle ABC}.$$

A,I,A_1 共线$\Leftrightarrow P_1$ 与 P_2 重合

$$\Leftrightarrow\frac{BP_1}{P_1C}=\frac{BP_2}{P_2C}\Leftrightarrow\frac{\sin\angle ACB}{\sin\angle ABC}=\frac{\sin\frac{\angle ACB}{2}\cdot\cos\left(\frac{\angle ABC}{2}-\angle BAC\right)}{\sin\frac{\angle ABC}{2}\cdot\cos\left(\frac{\angle ACB}{2}-\angle BAC\right)}.$$

$\Leftrightarrow\cos(\angle ACB-\angle BAC)=\cos(\angle ABC-\angle BAC)$

$\Leftrightarrow\angle ACB-\angle BAC=\angle BAC-\angle ABC$ 或 $\angle ACB-\angle BAC=\angle ABC-\angle BAC$(不合题意，舍去)

$\Leftrightarrow\angle BAC=60°$.

证法 4 如图 5-5，设$\triangle BHC$ 的外接圆半径为 R'，$\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R，又$\angle BHC=180°-\angle BAC$，则

$$R'=\frac{BC}{2\sin\angle BHC}=\frac{2R\cdot\sin\angle BAC}{2\sin\angle BAC}=R.$$

在$\odot A_1$ 中，又$\angle HA_1B=2\angle BCH=2(90°-\angle ABC)$，

$$\angle HA_1C=2(90°-\angle ACB),$$

则 $\angle CA_1B=\angle HA_1B+\angle HA_1C=2(180°-\angle ABC-\angle ACB)=2\angle BAC$，

从而

$$\angle A_1CB=\frac{1}{2}(180°-\angle CA_1B)=90°-\angle BAC.$$

又
$$\angle A_1CI=\frac{\angle ACB}{2}+90°-\angle BAC,$$

可计算得 $CI=4R\cdot\sin\frac{\angle BAC}{2}\cdot\sin\frac{\angle ABC}{2}$(在$\triangle AIC$ 中运用正弦定理).

A,I,A_1 三点共线$\Leftrightarrow S_{\triangle ACI}+S_{\triangle A_1CI}=S_{\triangle ACA_1}$

$\Leftrightarrow\frac{1}{2}AC\cdot CI\cdot\sin\frac{\angle ACB}{2}+\frac{1}{2}A_1C\cdot CI\cdot\sin\angle A_1CI$

$=\frac{1}{2}AC\cdot A_1C\cdot\sin\angle A_1CA$

$$\Leftrightarrow 2R\cdot\sin\angle ABC\cdot 4R\sin\frac{\angle BAC}{2}\cdot\sin\frac{\angle ABC}{2}\cdot\sin\frac{\angle ACB}{2}+$$

$$R\cdot 4R\sin\frac{\angle BAC}{2}\cdot\sin\frac{\angle ABC}{2}\cdot\sin\left(\frac{\angle ACB}{2}+90^\circ-\angle BAC\right)$$

$$=2R\cdot\sin\angle ABC\cdot R\cdot\sin(\angle ACB+90^\circ-\angle BAC)$$

$$\Leftrightarrow 4\sin\angle ABC\cdot\sin\frac{\angle BAC}{2}\cdot\sin\frac{\angle ACB}{2}+2\cdot\sin\frac{\angle BAC}{2}\cdot\cos\left(\angle BAC-\frac{\angle ACB}{2}\right)$$

$$=2\cdot\cos\frac{\angle ABC}{2}\cdot\cos(\angle BAC-\angle ACB)$$

$$\Leftrightarrow 4\sin\angle ABC\cdot\sin\frac{\angle BAC}{2}\cdot\sin\frac{\angle ACB}{2}=\left[\cos\left(\frac{\angle ABC}{2}+\angle BAC-\angle ACB\right)+\right.$$

$$\left.\cos\left(\frac{\angle ABC}{2}-\angle BAC+\angle ACB\right)\right]-$$

$$\left[\sin\left(\angle BAC+\frac{\angle BAC}{2}-\frac{\angle ACB}{2}\right)+\sin\left(\frac{\angle ACB}{2}-\frac{\angle BAC}{2}\right)\right]$$

$$=2\cos\left(\angle ACB-\frac{\angle BAC}{2}\right)\cdot\sin\frac{\angle ACB}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\sin(\angle BAC+\angle ACB)\cdot\sin\frac{\angle BAC}{2}=\cos\left(\angle ACB-\frac{\angle BAC}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow\cos\left(\frac{\angle BAC}{2}+\angle ACB\right)-\cos\left(\frac{3\angle BAC}{2}+\angle ACB\right)=\cos\left(\angle ACB-\frac{\angle BAC}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow\cos\left(\frac{\angle BAC}{2}+\angle ACB\right)=\cos\left(\frac{3\angle BAC}{2}+\angle ACB\right)+\cos\left(\angle ACB-\frac{\angle BAC}{2}\right)$$

$$=2\cos\left(\frac{\angle BAC}{2}+\angle ACB\right)\cdot\cos\angle BAC$$

$\Leftrightarrow\cos\angle BAC=\frac{1}{2}$，$\angle BAC$ 为三角形内角 $\Leftrightarrow$ $\angle BAC=60^\circ$.

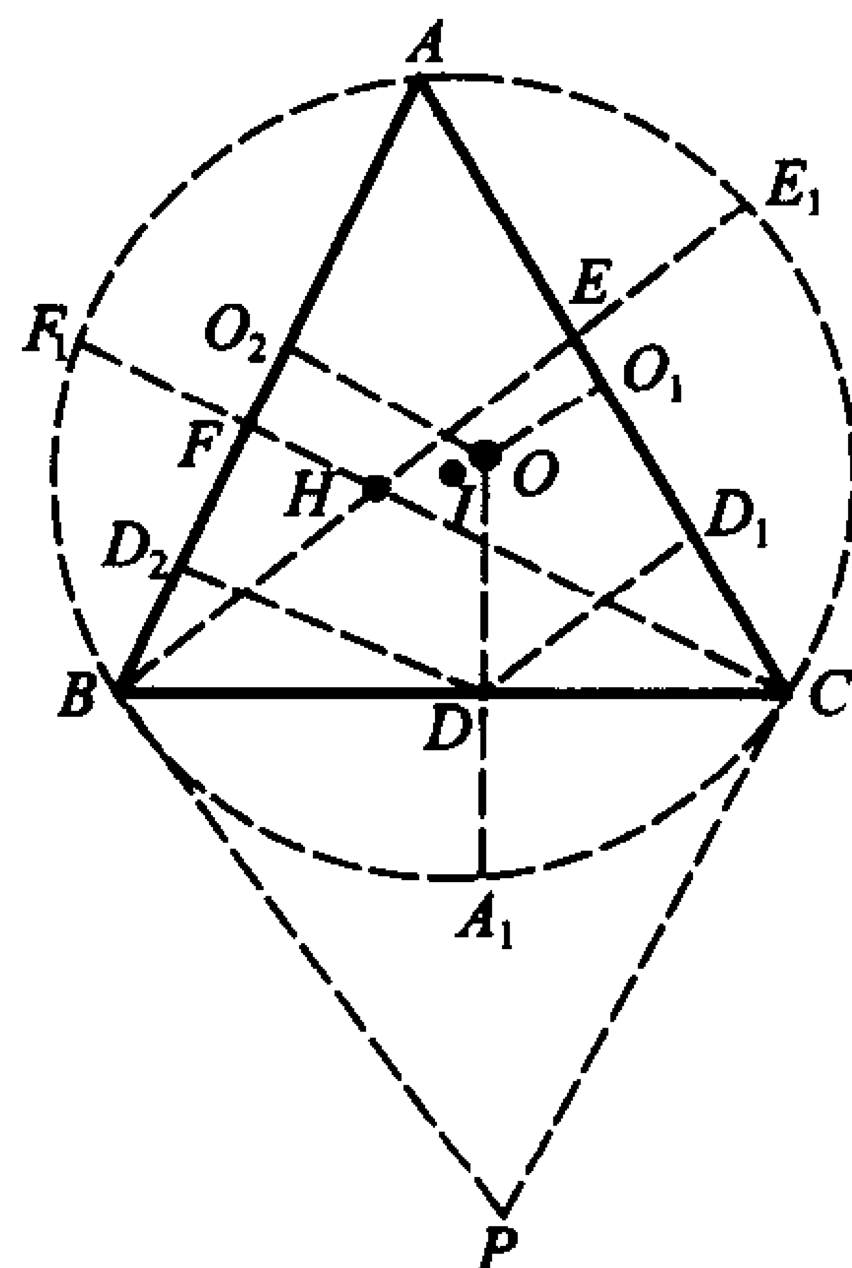


图 5－6

证法 5　如图 5－6，以 BC 边的中点 D 为中心，作 $\triangle ABC$ 的中心对称图形 $\triangle PCB$. 由 $CH\perp AB$ 知 $CH\perp CP$，由 $BH\perp AC$ 知 $BH\perp BP$，即知 B,P,C,H 四点共圆，从而 A_1 为 $\triangle BPC$ 的外心，且 A_1 是 O 关于对称中心 D 的对称点. 设 BH 的延长交 AC 于 E，交 $\odot O$ 于 E_1，作 $OO_1\perp AC$ 于 O_1，$OO_2\perp AB$ 于 O_2，作 $DD_1\perp AC$ 于 D_1，$DD_2\perp AB$ 于 D_2，注意到 $BH=2OO_1$ 及 $EH=EE_1$，则 A_1 到 AC 的距离 $=2DD_1-OO_1=BE-OO_1=EH+HB-OO_1=EH+HB-\frac{1}{2}$

$HB=EH+\frac{1}{2}HB=\frac{1}{2}BE_1$.

同理，A_1 到 AB 的距离 $=2DD_2-OO_2=CF-OO_2=\frac{1}{2}CF_1$.

因 I 为 $\triangle ABC$ 内心，A,I,A_1 三点共线 $\Leftrightarrow A_1$ 到 AC 的距离 $=A_1$ 到 AB 的距离

$\Leftrightarrow BE_1=CF_1\Leftrightarrow 2R\cdot\sin(\angle BAC+90°-\angle ACB)$

$=2R\cdot\sin(\angle BAC+90°-\angle ABC)$

$\Leftrightarrow(\angle BAC+90°-\angle ACB)+(\angle BAC+90°-\angle ABC)=180°$

或 $\angle BAC+90°-\angle ACB=\angle BAC+90°-\angle ABC$（不合题意，舍去）

$\Leftrightarrow\angle BAC=60°$.

再证明：$S_{\triangle BKB_2}=S_{\triangle CKC_2}\Leftrightarrow\angle BAC=60°$.

证法 1 作 $IM\perp AB$ 于点 M，$IN\perp AC$ 于点 N，则

$$S_{\triangle AB_1B_2}=\frac{1}{2}IM\cdot AB_2+\frac{1}{2}IN\cdot AB_1.$$

设 $IM=r$（r 为 $\triangle ABC$ 的内切圆半径），则 $IN=r$.

又令 $BC=a,CA=b,AB=c$，则 $r=\frac{2S_{\triangle ABC}}{a+b+c}$.

注意到 $S_{\triangle AB_1B_2}=\frac{1}{2}AB_1\cdot AB_2\cdot\sin\angle BAC$，以及

$$AB_1=\frac{b}{2},2AB_1\cdot\sin\angle BAC=h_c=\frac{2S_{\triangle ABC}}{c},$$

从而有
$$AB_2\cdot\left(\frac{2S_{\triangle ABC}}{c}-2\cdot\frac{2S_{\triangle ABC}}{a+b+c}\right)=b\cdot\frac{2S_{\triangle ABC}}{a+b-c},$$

即
$$AB_2=\frac{bc}{a+b-c}.$$

同理，$AC_2=\frac{bc}{a+c-b}$.

由 $S_{\triangle BKB_2}=S_{\triangle CKC_2}$，有 $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AB_2C_2}$，

于是 $bc=\frac{bc}{a+b-c}\cdot\frac{bc}{a+c-b}$.

即 $a^2=b^2+c^2-bc\Leftrightarrow$ 由余弦定理，$\angle BAC=60°$.

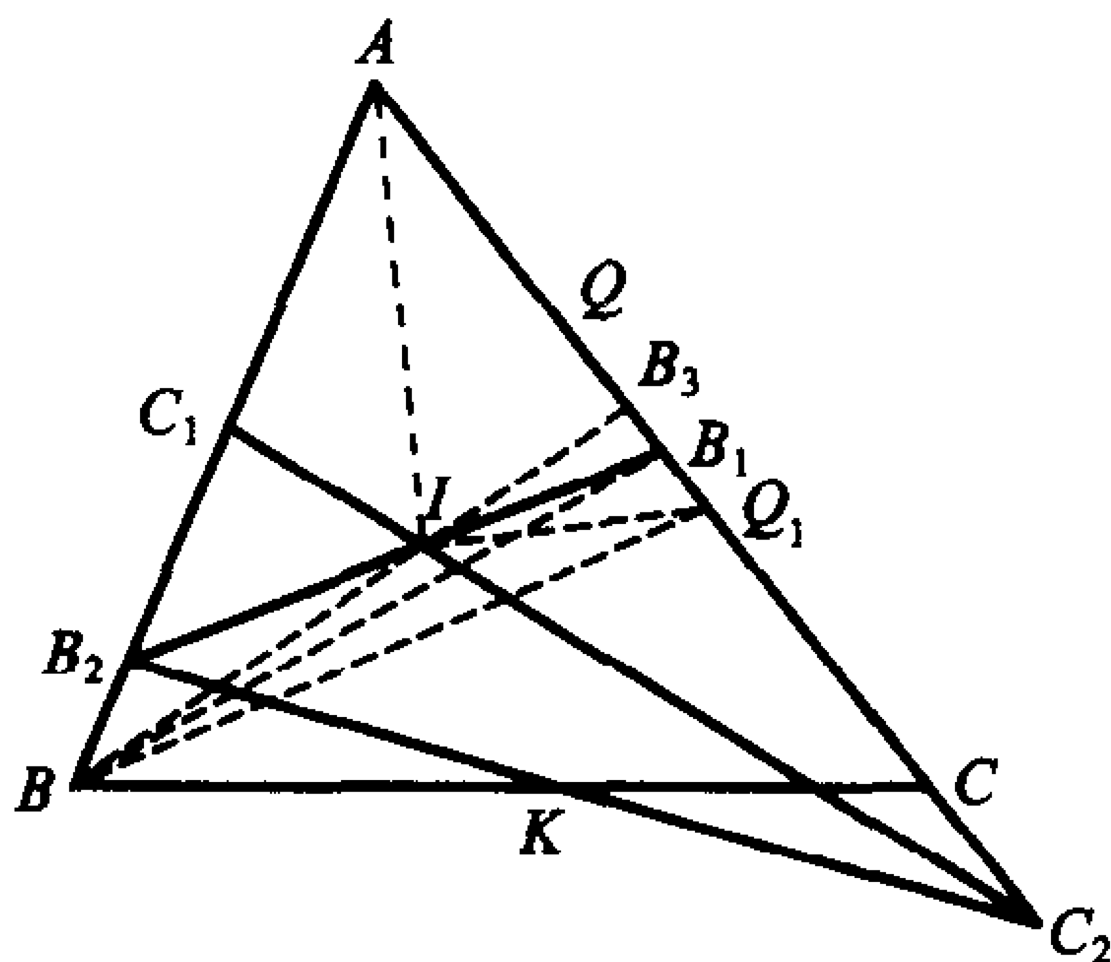


图 5-7

证法 2 如图 5-7，设 $\triangle ABC$ 的内切圆切 AC 边于 Q，在 AC 上取 Q_1，使 Q_1 关于 B_1 与 Q 对称. 令 $BC=a,CA=b,AB=c,p=$

$\frac{1}{2}(a+b+c)$，r 为 $\odot I$ 的半径，则

$$S_{\triangle IB_1Q_1}=\frac{r}{2}\cdot B_1Q_1=\frac{r}{2}(AB_1-AQ)=\frac{r}{2}\left(\frac{b}{2}-\frac{b+c-a}{2}\right)=\frac{r}{4}(a-c).$$

$$S_{\triangle IB_1B}=S_{\triangle ABB_1}-S_{\triangle AIB}-S_{\triangle AIB_1}=\frac{r}{2}\cdot\left(p-\frac{r}{2}\right)\cdot\left(c-\frac{r}{2}\right)\cdot\frac{b}{2}=\frac{r}{4}(a-c),$$

于是　$S_{\triangle IB_1Q_1}=S_{\triangle IB_1B}$，从而 $BQ_1/\!/B_2B_1$，即有 $\frac{AB_2}{AB}=\frac{AB_1}{AQ_1}$.

类似 Q_1 在 AB 边上定义 P_1，同理有 $\frac{AC_2}{AC}=\frac{AC_1}{AP_1}$.

而 $AQ_1=AC-AQ=b-\frac{b+c-a}{2}=p-c$.

同理，$AP_1=P-b$.

$S_{BKB_2}=S_{\triangle CKC_2}\Leftrightarrow S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AB_2C_2}$

$\Leftrightarrow\frac{AB_2\cdot AC_2}{AB\cdot AC}=1\Leftrightarrow\frac{AB_1\cdot AC_1}{AQ_1\cdot AP_1}=1\Leftrightarrow\frac{\frac{b}{2}\cdot\frac{c}{2}}{(p-c)(p-b)}=1.$

$\Leftrightarrow a^2=b^2+c^2-bc$，$\angle BAC$ 为三角形内角 $\Leftrightarrow\angle BAC=60°$.

证法 3　令 $BC=a$，$CA=b$，$AB=c$，连结 BI 并延长交 AC 于 B_3，如图 5-7，由角平分线性质，有 $\frac{AB}{AB_3}=\frac{BI}{IB_3}=\frac{BC}{B_3C}$，即 $\frac{BI}{IB_3}=\frac{AB+BC}{AB_3+B_3C}=\frac{c+a}{b}$.

对 $\triangle ABB_1$ 及直线 C_1IC_2，运用梅涅劳斯定理有

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BI}{IB_3}\cdot\frac{B_3C_2}{C_2A}=1.$$

而 $AC_1=C_1B$，从而 $\frac{B_3C_2}{C_2A}=\frac{IB_3}{BI}=\frac{b}{a+c}$，即 $B_3C_2=\frac{b}{a+c}C_2A$.

由 $\frac{AB_3}{C_2A}=\frac{C_2A-B_3C_2}{C_2A}=1-\frac{B_3C_2}{C_2A}=\frac{a+c-b}{a+c}$，有 $AB_3=\frac{a+c-b}{a+c}\cdot C_2A$.

又 $\frac{AB_3}{AC}=\frac{AB_3}{AB_3+B_3C}=\frac{AB}{BC+AB}=\frac{c}{a+c}$，即 $AC=\frac{a+c}{c}\cdot AB_3=\frac{a+c-b}{c}C_2A$，故 $\frac{AC}{AC_2}=\frac{a+c-b}{c}$.

同理，$\frac{AB}{AB_2}=\frac{a+b-c}{b}$.

$S_{\triangle BKB_2}=S_{\triangle CKC_2}\Leftrightarrow S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AB_2C_2}\Leftrightarrow\frac{AB}{AB_2}\cdot\frac{AC}{AC_2}=1$

$\Leftrightarrow\frac{a+b-c}{b}\cdot\frac{a+c-b}{c}=1\Leftrightarrow a^2=b^2+c^2-bc$，$\angle BAC$ 为三角形内角

$\Leftrightarrow\angle BAC=60°$.

证法 4 如图 5-7，令$\angle AB_1B_2=\alpha$，$\angle AC_1C_2=\beta$.

在$\triangle AB_1B_2$与$\triangle AC_1C_2$中分别运用正弦定理，有

$$\frac{AB_2}{AB_1}=\frac{\sin\alpha}{\sin(\angle BAC+\alpha)}=\frac{\tan\alpha}{\sin\angle BAC+\cos\angle BAC\cdot\tan\alpha},$$

$$\frac{AC_2}{AC_1}=\frac{\sin\beta}{\sin(\angle BAC+\beta)}=\frac{\tan\beta}{\sin\angle BAC+\cos\angle BAC\cdot\tan\beta}.$$

在$\triangle AIC$和$\triangle AIB_1$中分别运用正弦定理，有

$$\frac{AI}{AC}=\frac{AI}{2AB_1}=\frac{\sin\frac{\angle ACB}{2}}{\sin\left(\frac{\angle BAC}{2}+\frac{\angle ACB}{2}\right)},\text{即}\frac{AI}{AB_1}=\frac{2\sin\frac{\angle ACB}{2}}{\sin\left(\frac{\angle BAC}{2}+\frac{\angle ACB}{2}\right)},$$

$$\frac{AI}{AB_1}=\frac{\sin\alpha}{\sin\left(\alpha+\frac{\angle BAC}{2}\right)}.$$

$$\text{从而}\frac{\sin\alpha}{\sin\left(\alpha+\frac{\angle BAC}{2}\right)}=\frac{2\sin\frac{\angle ACB}{2}}{\sin\left(\frac{\angle BAC}{2}+\frac{\angle ACB}{2}\right)},\text{求得}\tan\alpha=\frac{2\sin\frac{\angle BAC}{2}\cdot\sin\frac{\angle ACB}{2}}{\sin\frac{1}{2}(\angle BAC-\angle ACB)}.$$

$$\text{于是}\frac{AB_2}{AB_1}=\frac{\sin\frac{\angle ACB}{2}}{\sin\frac{\angle BAC}{2}\sin\frac{\angle ABC}{2}},\text{即}\frac{AB_2}{AC}=\frac{\sin\frac{\angle ACB}{2}}{2\sin\frac{\angle BAC}{2}\cdot\sin\frac{\angle ABC}{2}}.$$

$$\text{同理},\frac{AC_2}{AB}=\frac{\sin\frac{\angle ABC}{2}}{2\sin\frac{\angle BAC}{2}\cdot\sin\frac{\angle ACB}{2}}.$$

$$S_{\triangle BKB_2}=S_{\triangle CKC_2}\Leftrightarrow S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AB_2C_2}\Leftrightarrow\frac{AB_2\cdot AC_2}{AB\cdot AC}=1$$

$$\Leftrightarrow\frac{\sin\frac{\angle ACB}{2}}{2\sin\frac{\angle BAC}{2}\cdot\sin\frac{\angle ABC}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{\angle ABC}{2}}{2\sin\frac{\angle BAC}{2}\cdot\sin\frac{\angle ACB}{2}}=1$$

$\Leftrightarrow 4\sin^2\frac{\angle BAC}{2}=1$，$\angle BAC$为三角形内角

$\Leftrightarrow\angle BAC=60°$.

证法 5 设$\triangle ABC$的外接圆半径为R，在$\triangle ACI$与$\triangle ABC$中，运用正弦定理，$\dfrac{AI}{\sin\frac{\angle ACB}{2}}=\dfrac{AC}{\sin\angle AIC}=\dfrac{AC}{\cos\frac{\angle ABC}{2}}=4R\cdot\sin\dfrac{\angle ABC}{2}$，即

$$AI=4R\cdot\sin\frac{\angle ABC}{2}\cdot\sin\frac{\angle ACB}{2}.$$

又 $AB_1=\frac{1}{2}AC=R\cdot\sin\angle ABC$.

在$\triangle AB_1B_2$ 中，运用张角定理，有

$$\frac{\sin\angle BAC}{AI}=\frac{\sin\frac{\angle BAC}{2}}{AB_1}+\frac{\sin\frac{\angle BAC}{2}}{AB_2}\text{，即有 }AB_2=1\Bigg/\left(\frac{2\cos\frac{\angle BAC}{2}}{AI}-\frac{1}{AB_1}\right)$$

$$=\frac{2R\cdot\sin\frac{\angle ABC}{2}\cdot\sin\frac{\angle ACB}{2}\cdot\cos\frac{\angle ABC}{2}}{\cos\frac{\angle BAC}{2}\cdot\cos\frac{\angle ABC}{2}-\sin\frac{\angle ACB}{2}}$$

$$=\frac{2R\cdot\cos\frac{\angle ABC}{2}\cdot\sin\frac{\angle ACB}{2}}{\sin\frac{\angle BAC}{2}}.$$

同理，$AC_2=\dfrac{2R\cdot\cos\frac{\angle ACB}{2}\cdot\sin\frac{\angle ABC}{2}}{\sin\frac{\angle BAC}{2}}$.

$S_{\triangle BKB_2}=S_{\triangle CKC_2}\Leftrightarrow S_{\triangle ABC}=S_{\triangle AB_2C_2}\Leftrightarrow AB\cdot AC=AB_2\cdot AC_2$

$$\Leftrightarrow\sin\angle ACB\cdot\sin\angle ABC=\frac{\sin\frac{\angle ACB}{2}\cdot\cos\frac{\angle ABC}{2}}{\sin\frac{\angle BAC}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{\angle ABC}{2}\cdot\cos\frac{\angle ACB}{2}}{\sin\frac{\angle BAC}{2}}$$

$\Leftrightarrow 4\sin^2\dfrac{\angle BAC}{2}=1$，$\angle BAC$ 为三角形内角$\Leftrightarrow\angle BAC=60°$.

习　题　5.1

1．锐角三角形的一个顶点到其垂心的距离等于外接圆的半径．求这个顶点处的三角形内角的度数．

2．设 AD,BE,CF 为$\triangle ABC$ 的三条高，D,E,F，分别为垂足，自 A,B,C 分别作 $AK\perp EF$ 与 K，作 $BL\perp DF$ 与 L，作 $CN\perp DE$ 与 E．证明：直线 AK,BL,CN 相交于一点．

第二节　面积法与面积坐标

1．面积与面积法证题

面积很早就成为人们认识几何图形性质和证明几何命题的工具．

张景中院士通过自己的亲身体验，提出了建立以面积为中心的几何度量新体系来挑战传统的欧几里得几何度量体系．

张院士指出:抓住面积,不但能把平面几何课程变得更容易学,而且使几何问题求解变得更有趣味.

在求解平面几何问题的时候,根据有关几何量与涉及的有关图形面积之间的内在联系,用面积或面积比表示有关几何量或其比,从而把要论证的几何量之间的关系转化为有关面积之间的关系,并通过图形面积的等积变换对所论问题来进行求解的方法,我们称之为面积法.

面积法证题,常用到如下的几个面积公式、几个等积变形定理和几个面积比定理:

(1) 设在$\triangle ABC$中,角A,B,C所对的边依次为a,b,c,又h_a为a边上的高,R为其外接圆半径,r为其内切圆半径,$p=\frac{1}{2}(a+b+c)$,则

① $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ah_a$; ② $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\cdot\sin A$;

③ $S_{\triangle ABC}=\frac{abc}{4R}$; ④ $S_{\triangle ABC}=\frac{a^2\sin B\cdot\sin C}{2\sin A}$;

⑤ $S_{\triangle ABC}=rp$; ⑥ $S_{\triangle ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

(2) 在凸四边形$ABCD$中,边长分别为a,b,c,d两对角线长为e,f,两对角线夹角为θ,$l=\frac{1}{2}(a+b+c+d)$,则

① $S_{ABCD}=\frac{1}{2}ef\cdot\sin\theta$;

② $S_{ABCD}=\frac{1}{4}\sqrt{4e^2f^2-(a^2+c^2-b^2-d^2)^2}$;

③ $S_{ABCD}=\sqrt{(l-a)(l-b)(l-c)(l-d)-abcd\cdot\cos^2\varphi}$.

(3) $S_{\square ABCD}=\frac{1}{2}a\cdot ha$.

(4) $S_{梯形}=\frac{1}{2}$(上底+下底)·高.

(5) 面积分割原理:一个图形的面积等于它的各部分面积的和.

(6) 两个全等图形的面积相等.

(7) 等底等高的两个三角形面积相等.

(8) 等积平行定理:$S_{\triangle A_1BC}=S_{\triangle A_2BC}$且$A_1,A_2$在$BC$的同侧$\Leftrightarrow A_1A_2\parallel BC$.

(9) 两相似图形的面积比等于其相似比的平方.

(10) 两个等底的三角形(或平行四边形)的面积比等于底边上对应高的比.

(11) 等高的两个三角形(或平行四边形)的面积比等于它们底边的比.

(12) 夹在两条平行线间的两个平面图形,被平行于这两条平行线的任意直

线所截，如果截得两条线段之比总等于一个常数 λ，那么这两个平面图形的面积之比为 λ.

(13) 内接于等圆的两个三角形的面积比等于三边乘积的比.

(14) 共边比例定理：若 $\triangle PAB$ 与 $\triangle QAB$ 的公共边所在直线与直线 PQ 交于 M，则 $\frac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle QAB}}=\frac{PM}{QM}$.

(15) 共角比例定理：若 $\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$ 的 $\angle A=\angle A'$ 或 $\angle A+\angle A'=180^\circ$，则 $\frac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A'B'C'}}=\frac{AB\cdot AC}{A'B'\cdot A'C'}$.

例 1　设 P 是 $\triangle ABC$ 的 $\angle A$ 平分线上的任一点，过 C 引 $CE/\!/PB$ 交 AB 的延长线于 E，过 B 引 $BF/\!/PC$ 交 AC 的延长线于 F，求证：$BE=CF$.

证明　如图 5-8，连结 PE，PF，由 $PC/\!/BF$ 有 $S_{\triangle PCF}=S_{\triangle PBC}$.

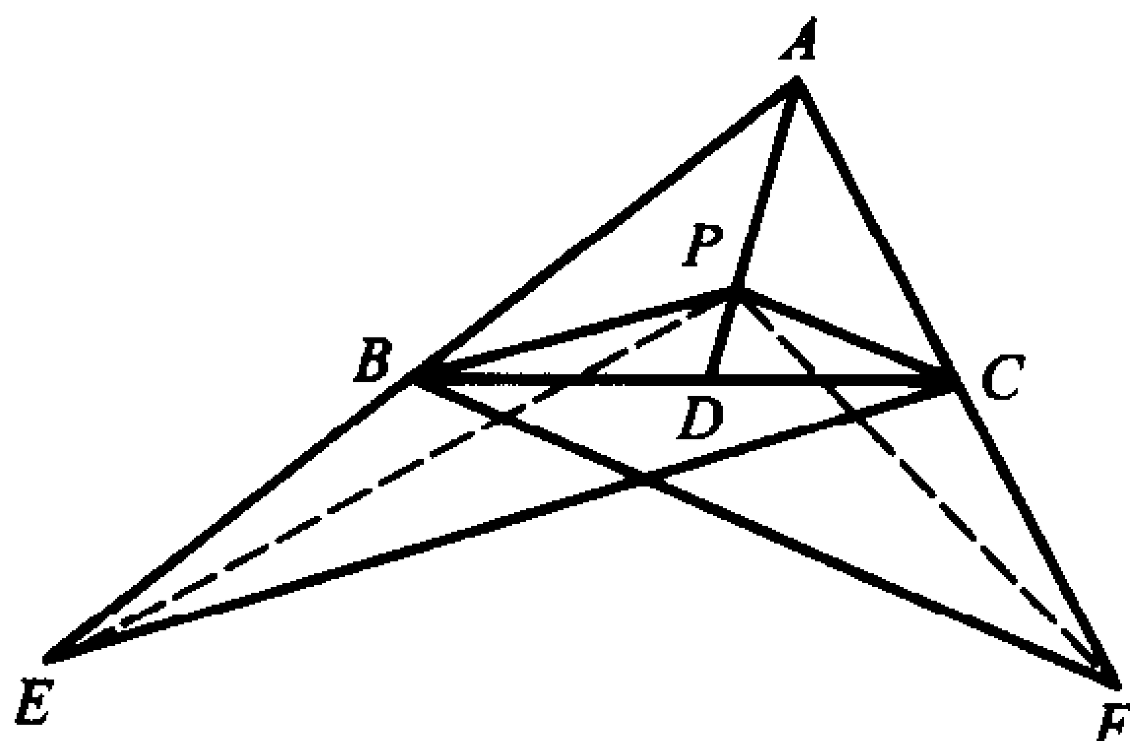


图 5-8

由 $PB/\!/CE$，有 $S_{\triangle PBE}=S_{\triangle PBC}$.

故　$S_{\triangle PCF}=S_{\triangle PBE}$.

又 P 是 $\angle A$ 的平分线上的点，P 点到 BE 及 CF 的距离相等，即 $\triangle PCF$ 的 CF 边上的高等于 $\triangle PBE$ 的 BE 边上的高，从而 $BE=CF$.

例 2　如图 5-9，在 $\triangle ABC$ 中，P 是 BC 边上的高 AH 上任一点，直线 CP 交 AB 于 D，直线 BP 交 AC 于 E，连结 DH，EH. 求证：$\angle DHP=\angle EHP$.

证明　过点 A 作 BC 的平行线分别交 HD，HE 的延长线于 F，G，则有 $\frac{AG}{HC}=\frac{AE}{EC}=\frac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle PCB}}$，从而 $AG=HC\cdot\frac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle PCB}}$.

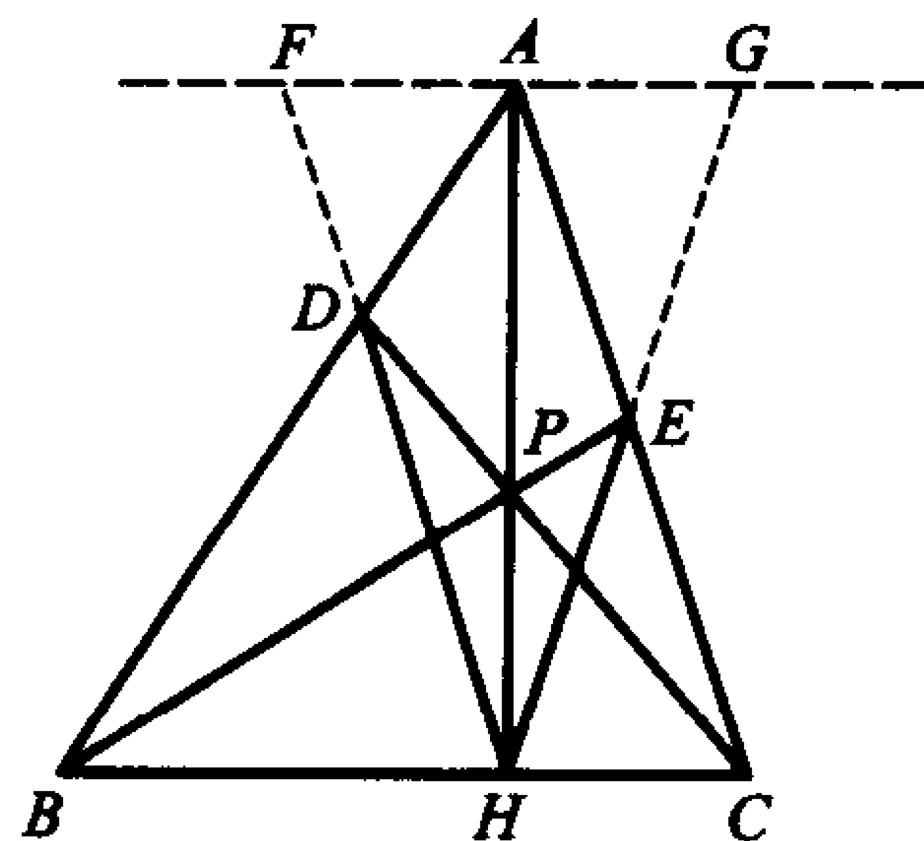


图 5-9

同理，$AF=BH\cdot\frac{S_{\triangle PAC}}{S_{\triangle PBC}}$，$BH=HC\cdot\frac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle PAC}}$.

由上述三式，有 $\frac{AG}{AF}=\frac{HC}{BH}\cdot\frac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle PAC}}=1$.

即 $AG=AF$，从而 AH 是 FG 的中垂线，故 $\angle DHP=\angle EHP$.

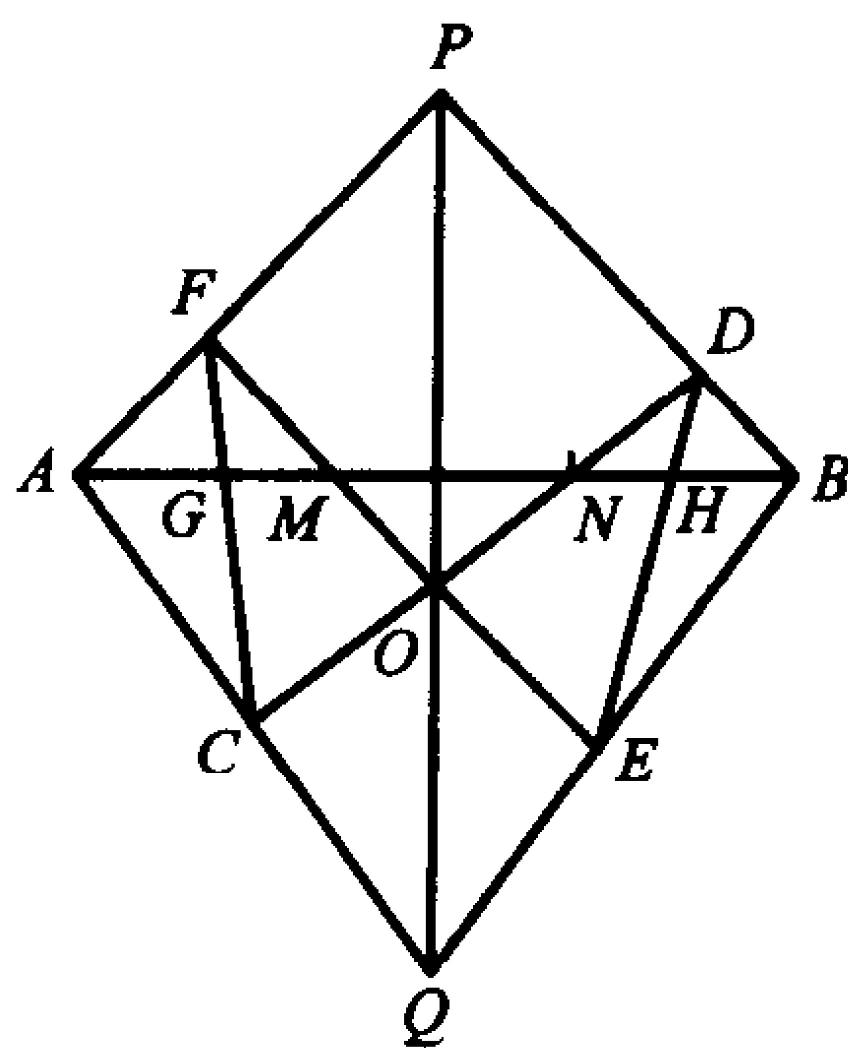


图 5-10

例 3 如图 5-10，已知 PQ 垂直平分 AB，O 是 PQ 上任一点. 过 O 作直线与 AP，AB，BQ 顺次交于 F，M，E，又作直线与 AQ，AB，BP 顺次交于 C，N，D，连结 CF，DE 交 AB 于 G，H.

求证：$\dfrac{MG}{AG}=\dfrac{NH}{BH}\cdot\dfrac{MB}{NA}$.

证明 由
$$\frac{MG}{AG}\cdot\frac{BH}{NH}=\frac{S_{\triangle MCF}}{S_{\triangle ACF}}\cdot\frac{S_{\triangle BDE}}{S_{\triangle NDE}}$$
$$=\frac{S_{\triangle BDE}}{S_{\triangle ACF}}\cdot\frac{S_{\triangle MCF}}{S_{\triangle DNE}}$$
$$=\frac{BD\cdot BE}{AF\cdot AC}\cdot\frac{MF\cdot OC}{OE\cdot ND}$$
$$=\frac{BD\cdot BE}{AF\cdot AC}\cdot\frac{S_{\triangle BMF}}{S_{\triangle BOE}}\cdot\frac{S_{\triangle AOC}}{S_{\triangle AND}}$$
$$=\frac{BD\cdot BE}{AF\cdot AC}\cdot\frac{BM\cdot AF}{AN\cdot BD}\cdot\frac{AC\cdot QO}{BE\cdot QO}$$
$$=\frac{BM}{AN},$$

即有 $\dfrac{MG}{AG}=\dfrac{NH}{BH}\cdot\dfrac{MB}{NA}$.

2. 消点思想与消点法证题

在研究几何定理的机器证明中，张景中院士以他多年来所发展的面积法为基础，提出了消点思想. 他和周咸青、高小山合作，于 1992 年实现了可读性证明的自动生成. 这是一种既不以坐标为基础，也不同于传统的综合方法，而是一个以几何不变量为工具，把几何、代数逻辑和人工智能方法结合起来所形成的开发系统，它选择几个基本的几何不变量和一套作图规则，并且建立一系列与这些不变量和作图规则有关的消点公式，当命题的前提以作图语句的形式输入时，程序可调用适当的消点公式把结论中的约束点逐个消去，最后达到水落石出. 消点的过程记录与消点公式相结合，就是一个具有几何意义的证明.

基于此法所编的程序，已在微机上对数以百计的困难的几何定理完全自动生成了简短的可读证明，其效率比其他方法高得多，这一成果被国际同行誉为使计算机能像处理算术那样处理几何的发展道路上的里程碑，是自动推理领域三十多年来最重要的工作. 更重要的是，这种方法也可以不用计算机而由人用笔在纸上执

行，这种方法我们称为证明几何问题的消点法. 消点时，是将作图过程中依次出现的点反顺序消去，即作图时最后出现的点最先消去，作图时最先出现的点最后消去.

消点法把证明与作图联系起来，把几何推理与代数演算联系起来，使几何证题的逻辑性更强了，它结束了两千来几何证题无定法的局面，把初等几何证题法从四则杂题的层次推进到代数方法的阶段，从而几何证题术有了以不变应万变的模式.

简单的例子可参见第十章第三节中的例 7－9，这里看一道较复杂的例子.

例 4 如图 5－11，设$\triangle ABC$的内心为I，BC边的中点为M，Q在IM的延长线上并且$IM=MQ$，AI的延长线与$\triangle ABC$的外接圆交于点D，DQ与$\triangle ABC$的外接圆交于点N. 求证：$AN+CN=BN$.

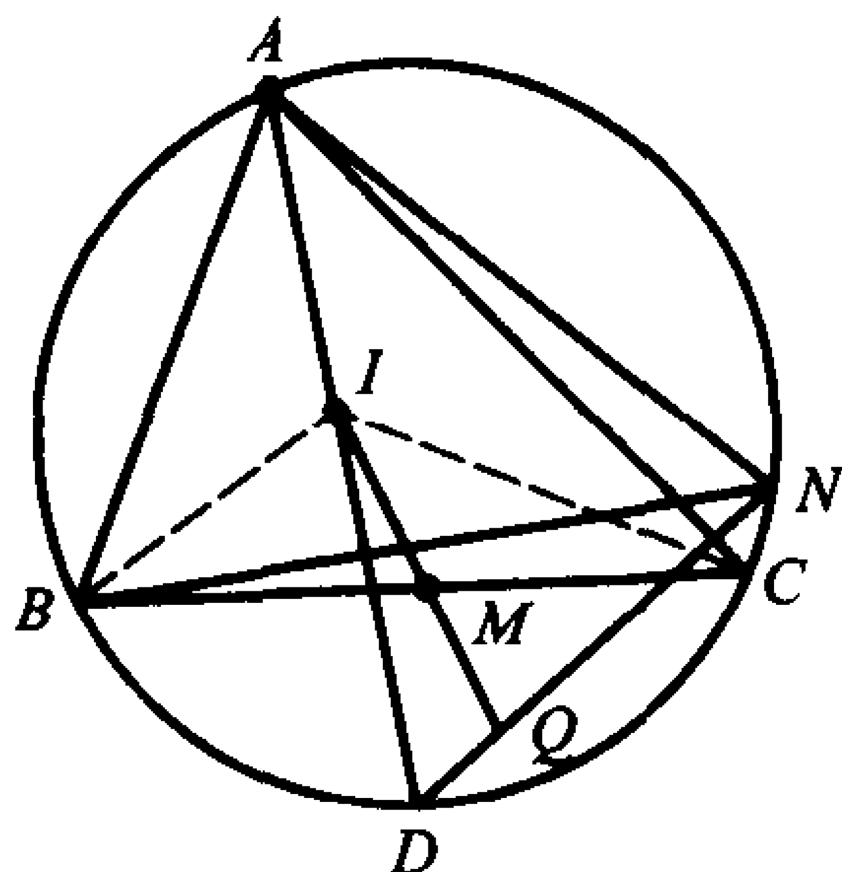


图 5－11

分析 由于所证式中的线段都是$\triangle ABC$外接圆的弦，故可用正弦定理转化成三角函数式而证，又作图过程为：

(1) 任取不共线三点A,B,C；

(2) 取$\triangle ABC$内心I；

(3) 取BC中点M；

(4) 延长IM至Q，使$MQ=IM$；

(5) 延长AI与$\triangle ABC$外接圆交于D；

(6) 直线DQ与$\triangle ABC$外接圆交于N.

证明 由于AN,CN,BN都是$\triangle ABC$外接圆的弦，若设外接圆直径为d，则有$AN=d\cdot\sin\angle D$，$BN=d\cdot\sin\angle BDN$，$CN=d\cdot\sin\angle CBN$.

记$\angle D=\theta$，$\angle BAC=A$，$\angle ABC=B$，$\angle ACB=C$，则

$$\angle BDN=\angle BDA+\angle D=C+\theta,\ \angle CBN=B-\angle ABN=B-\theta.$$

于是所证等式化为 $d\sin\theta+d\sin(B-\theta)=d\cdot\sin(C+\theta)$.

则 $\sin\theta+\sin\theta\cdot\cos B-\cos B\cdot\sin\theta=\sin C\cdot\cos\theta+\cos C\cdot\sin\theta$,

即 $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{\sin C-\sin B}{1-\cos B-\cos C}$.（此时已消去点$N$）

下面继续消去Q和M：

由于$S_{\triangle IDQ}=\dfrac{1}{2}ID\cdot QD\cdot\sin\theta$，则$\sin\theta=\dfrac{2S_{\triangle IDQ}}{ID\cdot QD}$.

由$IM=MQ$，有$S_{\triangle IDQ}=2S_{\triangle IDM}$.

又 $QD\cdot\cos\theta=ID-IQ\cdot\cos\angle QID=ID-2IM\cdot\cos\angle MID$.

则 $\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{2S_{\triangle IDQ}}{ID\cdot QD\cdot\cos\theta}=\dfrac{4S_{\triangle IDM}}{(ID-2IM\cdot\cos\angle MID)\cdot ID}$（此时已消去$Q$点）.

由于 M 是 BC 中点及 $S_{\triangle IDB}+S_{\triangle IDM}=S_{\triangle IDC}-S_{\triangle IDM}$，并注意到 B,C,M 在 ID 上的投影，则有

$$S_{\triangle IDM}=\frac{1}{2}(S_{\triangle IDC}-S_{\triangle IDB}).$$

且 $$IM\cdot\cos\angle MID=\frac{1}{2}(IB\cdot\cos\angle BID+IC\cdot\cos\angle CID)$$

$$=\frac{1}{2}\left(IB\cdot\cos\frac{A+B}{2}+IC\cdot\cos\frac{A+C}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(IB\cdot\sin\frac{C}{2}+IC\cdot\sin\frac{C}{2}\right),$$

则 $$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{2(S_{\triangle IDC}-S_{\triangle IDB})}{\left(ID-IB\cdot\sin\frac{C}{2}-IC\cdot\sin\frac{B}{2}\right)\cdot ID}$$（此时已消去 M 点）.

又由面积公式和正弦定理，有

$$S_{\triangle IDC}=\frac{1}{2}ID\cdot DC\cdot\sin\angle IDC=\frac{1}{2}ID\cdot DC\cdot\sin B,$$

$$S_{\triangle IDB}=\frac{1}{2}ID\cdot BD\cdot\sin\angle IDB=\frac{1}{2}ID\cdot DB\cdot\sin C,$$

$$\frac{IB}{ID}=\frac{\sin\angle ADB}{\sin\angle IBD}=\frac{\sin\angle C}{\sin\frac{A+B}{2}}=\frac{\sin C}{\cos\frac{C}{2}}=2\sin\frac{C}{2}$$

$$\frac{IC}{ID}=\frac{\sin\angle ADC}{\sin\frac{A+C}{2}}=\frac{\sin B}{\cos\frac{B}{2}}=2\sin\frac{B}{2},\frac{DC}{ID}=\frac{BD}{ID}=\frac{\sin\angle BID}{\sin\angle IBD}=\frac{\sin\frac{A+B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}}=1.$$

则 $$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{ID\cdot DC\sin B-ID\cdot DB\cdot\sin C}{ID\cdot ID\left(1-\frac{IB}{ID}\sin\frac{C}{2}-\frac{IC}{ID}\sin\frac{B}{2}\right)}=\frac{\frac{DC}{ID}\cdot\sin B-\frac{DB}{ID}\cdot\sin C}{1-2\sin^2\frac{C}{2}-2\sin^2\frac{B}{2}}$$

$$=\frac{\sin B-\sin C}{-1+\cos C+\cos B}=\frac{\sin C-\sin B}{1-\cos B-\cos C}.$$ 由此即证得结论.

从上述例子可以看出：只要题目中的条件可以用尺规作图表出，并且结论可以表成常用几何量的多项式等式（常用几何量包括面积、线段及角的三角函数），总可以用消点法一步一步地写出解答. 当要消去某点 P 时，一看 P 是怎么产生的，即与其他点的关系；二看 P 处在哪种几何量之中. 由于作图法只有有限种（设为 n 种），几何量也只有有限个（设为 m 个），故消点方式至多不外 $m\times n$ 种. 这就是消点法证几何题以不变应万变模式的基本依据（实际上是几何证题可以机械化的基本依据）.

3. 面积坐标

如果引入带正负号的面积（如规定图形的边界走向是逆时针方向则面积为

正，走向是顺时针方向则面积为负)，就可以引入面积坐标了.

在平面上任取一个定向三角形$\overline{\triangle}A_1A_2A_3$，叫它"坐标三角形". A_1，A_2，A_3叫做基点.对平面上任一点M，就有了三个三角形的带号面积：

$$S_1=S_{\overline{\triangle}MA_2A_3}, S_2=S_{\overline{\triangle}MA_3A_1}, S_3=S_{\overline{\triangle}MA_1A_2}.$$

把三元数组(S_1,S_2,S_3)叫做(以$\overline{\triangle}A_1A_2A_3$为坐标三角形时)点$M$的"面积坐标"，记作$M=(S_1,S_2,S_3)$.

显然，相同的点有相同的面积坐标，不同的点有不同的坐标，S_1，S_2，S_3叫做M的三个"坐标分量"，且满足$S_1+S_2+S_3=S_{\overline{\triangle}A_1A_2A_3}$.因此，随便给三个数，可不一定是某个点的面积坐标.

若给出三者之比$S_1:S_2:S_3=\mu_1:\mu_2:\mu_3$，且$\mu_i=\dfrac{S_i}{S_1+S_2+S_3}(i=1,2,3)$，则$(\mu_1:\mu_2:\mu_3)$叫做$M=(S_1,S_2,S_3)$的齐次面积坐标.通常$(\mu_1:\mu_2:\mu_3)$叫做$M$的重心坐标.其物理意义是鲜明的：如果给$A_1$，$A_2$，$A_3$赋以质量$\mu_1$，$\mu_2$，$\mu_3$，则质点$A_1$，$A_2$，$A_3$赋以质量$\mu_1$，$\mu_2$，$\mu_3$，则质点$A_1(\mu_1)$，$A_2(\mu_2)$，$A_3(\mu_3)$的重心恰在$M$处.显然，当$S_1+S_2+S_3=S=1$时，面积坐标也就是规范重心坐标.

由于知道了$M(S_1,S_2,S_3)$的两个坐标分量，就可以确定M，从而可以用(S_1,S_2)来表示点M，或者用$\left(\dfrac{S_1}{S},\dfrac{S_2}{S}\right)$叫做在坐标系$\{A_3,\overrightarrow{A_3A_1},\overrightarrow{A_3A_2}\}$之下$M$的仿射坐标，而$A_3$叫做这个仿射坐标的原点.如果$|\overrightarrow{A_3A_1}|=|\overrightarrow{A_3A_2}|=1$，且$\angle A_1A_3A_2=90°$，则这个仿射坐标系$\{A_3,\overrightarrow{A_3A_1},\overrightarrow{A_3A_2}\}$叫笛卡儿坐标系，也就是常用的直角坐标系.

这样，面积坐标实际上包括了重心坐标、仿射坐标、直角坐标等多种坐标.在面积坐标系里推出一个公式来，马上可以变换成其他坐标系里的公式.

关于面积坐标在解题时的大量应用，可看见《初等数学论丛》(3)中杨路先生的文章《谈谈重心坐标》(上海教育出版社)或《中国初等数学研究文集(Ⅰ)》中过伯祥先生的文章《三角形几何学的新方法与新成果》(河南教育出版社).

习 题 5.2

1. 设凸四边形$ABCD$的两边AB，CD延长后交于L，两边CB，DA延长后交于K.对角线AC，BD的延长线分别交直线KL于G，F.求证：$\dfrac{LF}{KF}=\dfrac{LG}{KG}$.

2. 设AM是$\triangle ABC$在BC边上的中线，任作一条直线分别交AB，AC，AM于P，Q，N.求证：$\dfrac{AB}{AP}$，$\dfrac{AM}{AN}$，$\dfrac{AC}{AQ}$成等差数列.

第三节 向量法与复数法

1. 向量法与向量法证题

把向量作为工具来研究与求解有关数学问题的方法称之为向量方法. 向量法的特点是形数结合、运算有法可循，因此向量法既有综合法的灵巧，又有坐标法的方便，能把综合法与坐标法有机地结合在一起. 因而平面几何问题如用向量法来研究与求解，往往用计算代替演绎论证而显得明快、简捷和容易入手，它克服了几何综合论证中常常要添置若干辅助线而显得不易捉摸的缺点，同时又因为向量公式不依赖于坐标系，故向量法求解平面几何问题较之于坐标法也具有一定的优越性.

例如，运用向量法可以很简捷地证明第一节中的例 1：

设三个圆的圆心分别为 O_1,O_2,O_3，又设 A,B,C 分别为$\odot O_2$ 与$\odot O_3$，$\odot O_1$ 与$\odot O_3$，$\odot O_1$ 与$\odot O_2$ 的交点，M 为三个圆的交点，则

$\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MO_2}+\overrightarrow{MO_3}$，$\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MO_1}+\overrightarrow{MO_3}$，$\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MO_1}+\overrightarrow{MO_2}$，于是，

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{MO_1}-\overrightarrow{MO_2}=\overrightarrow{O_2O_1}$，$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{MC}-\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MO_2}-\overrightarrow{MO_3}=\overrightarrow{O_3O_2}$，

$\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MO_3}-\overrightarrow{MO_1}=\overrightarrow{O_1O_3}$，故$\triangle ABC\cong\triangle O_1O_2O_3$.

$\triangle O_1O_2O_3$ 的外接圆以 M 为圆心，R 为半径，故$\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R.

除运用向量运算法则与性质外，运用向量法还常用到如下一系列公式：

(1) 设点 P 分有向线段$\overrightarrow{AB}$为定比 λ，即$\dfrac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}}=\lambda$，则 $\overrightarrow{PA}+\lambda\overrightarrow{PB}=\vec{0}$，

$\vec{P}=\dfrac{\vec{A}+\lambda\vec{B}}{1+\lambda}$.

(2) 在$\triangle ABC$ 中，点 C_1,B_1 分别分$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AC}$为定比 λ,μ，即$\dfrac{\overrightarrow{AC_1}}{\overrightarrow{C_1B}}=\lambda$，$\dfrac{\overrightarrow{AB_1}}{\overrightarrow{B_1C}}=\mu$，

或 $\vec{C_1}=\dfrac{\vec{A}+\lambda\vec{B}}{1+\lambda}$，$\vec{B_1}=\dfrac{\vec{A}+\mu\vec{C}}{1+\mu}$，则对于 CC_1 与 BB_1 的交点 P，有

$$\overrightarrow{PA}+\lambda\overrightarrow{PB}+\mu\overrightarrow{PC}=\vec{0}\,;\vec{P}=\frac{\vec{A}+\lambda\vec{B}+\mu\vec{C}}{1+\lambda+\mu}.$$

(3) 平面上两点 A,B 间的距离

$$d(A,B)=|\overrightarrow{AB}|^2=|\vec{A}-\vec{B}|=\sqrt{\vec{A}^2+\vec{B}^2-2\vec{A}\cdot\vec{B}}.$$

(4) 平面上点 P 到直线 l 的距离

$$d(p,l)=\begin{cases}\dfrac{|(\vec{P}-\vec{A})\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|} & (\text{当 } A\in l,\vec{n}\perp l \text{ 时}),\\[2ex] \dfrac{|(\vec{P}-\vec{A})\times\vec{n}|}{|\vec{n}|} & (\text{当 } A\in l,\vec{n}/\!/ l \text{ 时}),\\[2ex] \dfrac{|\overrightarrow{PA}\times\overrightarrow{PB}|}{|\overrightarrow{AB}|}=\dfrac{|\vec{P}\times\vec{A}+\vec{A}\times\vec{B}+\vec{B}\times\vec{P}|}{|\vec{A}\times\vec{B}|} & (\text{当 } A,B\in l \text{ 时}).\end{cases}$$

(5) 设非零向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为 $\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$. 则

$$\sin\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\frac{|\vec{a}\times\vec{b}|}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|},\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}.$$

(6) 两直线(不重合) A_1B_1 与 A_2B_2 平行的充要条件是

$\lambda_1\overrightarrow{A_1B_1}=\lambda_2\overrightarrow{A_2B_2}$ (λ_1,λ_2 为非零实数) $\Leftrightarrow\overrightarrow{A_1B_1}\times\overrightarrow{A_2B_2}=\vec{0}$

$\Leftrightarrow|\overrightarrow{A_1B_1}\cdot\overrightarrow{A_2B_2}|=|\overrightarrow{A_1B_1}\cdot\overrightarrow{A_2B_2}|$.

(7) 两直线 A_1B_1 与 A_2B_2 垂直的充要条件是

$\overrightarrow{A_1B_1}\cdot\overrightarrow{A_2B_2}=0\Leftrightarrow|\overrightarrow{A_1B_1}\times\overrightarrow{A_2B_2}|=|\overrightarrow{A_1B_1}|\cdot|\overrightarrow{A_2B_2}|$.

(8) $S_{\triangle A_1A_2A_3}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}|=\frac{1}{2}|\vec{A_1}\times\vec{A_2}+\vec{A_2}\times\vec{A_3}+\vec{A_3}\times\vec{A_1}|$.

(9) A_1,A_2,A_3 三点共线的充要条件是

$|\overrightarrow{A_1A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3}|=|\overrightarrow{A_1A_2}|\cdot|\overrightarrow{A_1A_3}|$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{A_1A_2}\times\overrightarrow{A_1A_3}=0$，即 $\vec{A_1}\times\vec{A_2}+\vec{A_2}\times\vec{A_3}+\vec{A_3}\times\vec{A_1}=0$

$\Leftrightarrow\overrightarrow{A_1A_3}=l\overrightarrow{A_1A_2}$，即 $\vec{A_3}=(1-l)\vec{A_1}+l\vec{A_2}$

$\Leftrightarrow$存在非零实数 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 及 $\lambda_1\vec{A_1}+\lambda_2\vec{A_2}+\lambda_3\vec{A_3}=0$，

且 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0$.

例 1　如图 5－12，设四边形 $ABCD$ 的两对角线 AC,BD 的中点分别为 M,N，求证：$\frac{1}{2}|AB-CD|\leqslant MN\leqslant\frac{1}{2}(AB+CD)$.

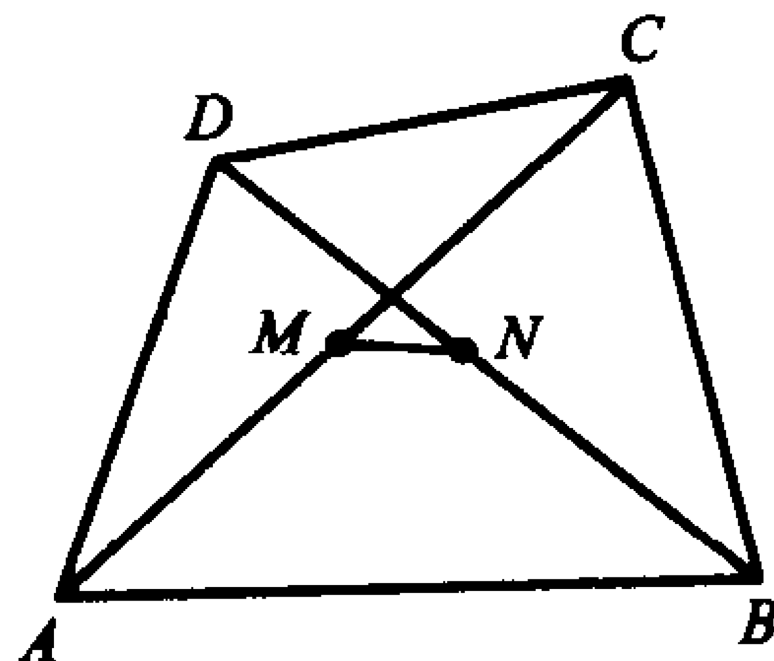


图 5－12

证法 1　由 $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}$，而 $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DN}$，有 $2\overrightarrow{MN}=(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC})+(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})+(\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{DN})$.

由 M,N 分别为 AC,BD 的中点，即

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MC}=\vec{0},\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{DN}=\vec{0},$$

则 $\overrightarrow{MN}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}),|\overrightarrow{MN}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}|.$

但 $$\left||\overrightarrow{AB}|-|\overrightarrow{CD}|\right|\leqslant|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}|\leqslant|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{CD}|,$$

所以 $$\frac{1}{2}\left||\overrightarrow{AB}|-|\overrightarrow{CD}|\right|\leqslant|\overrightarrow{MN}|\leqslant\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{CD}|.$$

即 $$\frac{1}{2}|AB-CD|\leqslant MN\leqslant\frac{1}{2}(AB+CD).$$

特别地，当 $AB/\!/CD$ 又 $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}$ 反向时，在 $\left||\overrightarrow{AB}|-|\overrightarrow{CD}|\right|\leqslant|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}|$ 中等号成立.

证法 2 在四边形 $ABCD$ 所在平面内任取一点 O 作为向量坐标原点，则 $\vec{M}=\frac{1}{2}(\vec{A}+\vec{C}),\vec{N}=\frac{1}{2}(\vec{B}+\vec{D})$. 而 $\overrightarrow{MN}=\vec{N}-\vec{M}=\frac{1}{2}(\vec{B}+\vec{D})-\frac{1}{2}(\vec{A}+\vec{C})$ $=\frac{1}{2}[(\vec{D}-\vec{C})-(\vec{A}-\vec{B})]$

故 $$\left|\left|\frac{\vec{D}-\vec{C}}{2}\right|-\left|\frac{\vec{A}-\vec{B}}{2}\right|\right|\leqslant\left|\frac{(\vec{D}-\vec{C})-(\vec{A}-\vec{B})}{2}\right|$$

$$=\left|\frac{(\vec{D}-\vec{C})+(\vec{B}-\vec{A})}{2}\right|\leqslant\left|\frac{\vec{D}-\vec{C}}{2}\right|+\left|\frac{\vec{B}-\vec{A}}{2}\right|.$$ 以下同证法 1(略).

例 2 证明斯特瓦尔特(Stewart)定理：设 A_1,A_2,A_3 为共线三点，P 为任意一点，则

$$PA_1^2\cdot\overrightarrow{A_2A_3}+PA_2^2\cdot\overrightarrow{A_3A_1}+PA_3^2\,\overrightarrow{A_1A_2}=-\overrightarrow{A_2A_3}\cdot\overrightarrow{A_3A_1}\cdot\overrightarrow{A_1A_2}.\ (*)$$

证法 1 如图 5-13，设 $\frac{\overrightarrow{A_1A_3}}{\overrightarrow{A_3A_2}}=\lambda$，

则 $\frac{\overrightarrow{A_1A_3}}{\overrightarrow{A_1A_2}}=\frac{\lambda}{1+\lambda},\frac{\overrightarrow{A_3A_2}}{\overrightarrow{A_1A_2}}=\frac{1}{1+\lambda}$，

$\overrightarrow{A_3A_2}\cdot\overrightarrow{A_1A_3}=\frac{\lambda}{(1+\lambda)^2}\overrightarrow{A_1A_2}^2.$

从而欲证式(*)可化为

$$\overrightarrow{PA_3}^2=\frac{(1+\lambda)\overrightarrow{PA_1}^2+\lambda(1+\lambda)\overrightarrow{PA_2}^2-\lambda\overrightarrow{A_1A_2}}{(1+\lambda)^2}.$$

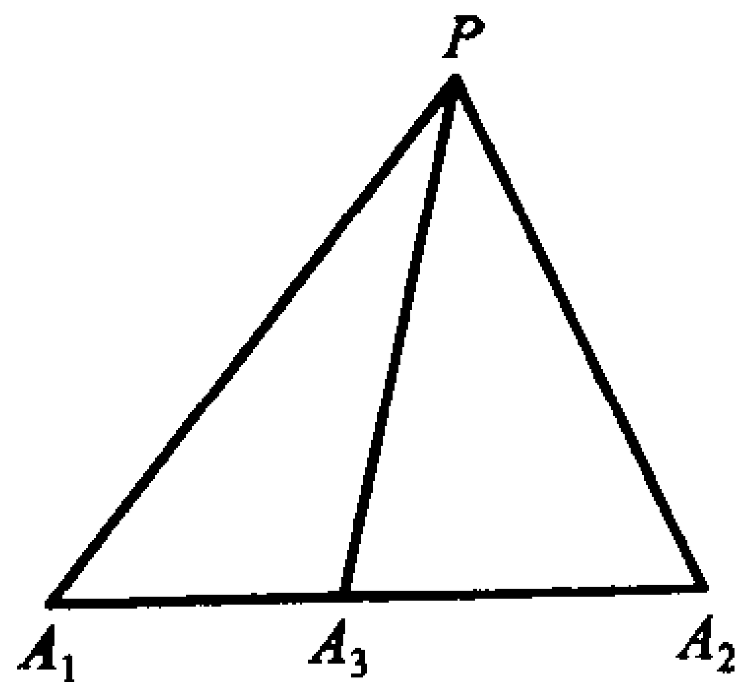


图 5-13

将$\overrightarrow{A_1A_2}^2=(\overrightarrow{PA_2}-\overrightarrow{PA_1})^2=\overrightarrow{PA_1}^2+\overrightarrow{PA_2}^2-2\overrightarrow{PA_1}\cdot\overrightarrow{PA_2}$代入上式化为

$$\overrightarrow{PA_3}^2=\left(\frac{\overrightarrow{PA_1}+\lambda\overrightarrow{PA_2}}{1+\lambda}\right)^2,$$

由$\dfrac{\overrightarrow{A_1A_3}}{\overrightarrow{A_3A_2}}=\lambda$知上式成立，故(＊)式获证.

证法 2　因 A_1,A_2,A_3 三点共线，故可令

$\overrightarrow{PA_3}=\lambda\overrightarrow{PA_1}+\lambda_2\overrightarrow{PA_2}(\lambda_1+\lambda_2=1)$，其中 $\lambda_1=\dfrac{\overrightarrow{A_3A_2}}{\overrightarrow{A_1A_2}},\lambda_2=\dfrac{\overrightarrow{A_1A_3}}{\overrightarrow{A_1A_2}}$.

于是，$\lambda_1\overrightarrow{PA_1}^2+\lambda_2\overrightarrow{PA_2}^2=\lambda_1(\overrightarrow{PA_3}+\overrightarrow{A_3A_1})^2+\lambda_2(\overrightarrow{PA_3}+\overrightarrow{A_3A_2})^2$

$=\overrightarrow{PA_3}^2+\lambda_1\overrightarrow{A_3A_1}^2+\lambda_2\overrightarrow{A_3A_2}^2+2\overrightarrow{PA_3}\cdot(\lambda_1\overrightarrow{A_3A_1}+\lambda_2\overrightarrow{A_3A_2})$，

但 $\lambda_1\overrightarrow{A_3A_1}=-\lambda_2\overrightarrow{A_3A_2}$，故 $\lambda_1\overrightarrow{PA_1}^2+\lambda_2\overrightarrow{PA_2}^2-\overrightarrow{PA_3}^2=\lambda_1\overrightarrow{A_3A_1}^2+\lambda_2\overrightarrow{A_3A_2}^2$.

将 λ_1,λ_2 的值代入上式整理即证得结论.

例 3　如图 5－14，设 O 为锐角$\triangle ABC$ 的外心，若 AO,BO,CO 分别交对边于 L,M,N，设 R 为$\odot O$ 的半径. 求证：$\dfrac{1}{AL}+\dfrac{1}{BM}+\dfrac{1}{CN}=\dfrac{2}{R}$.

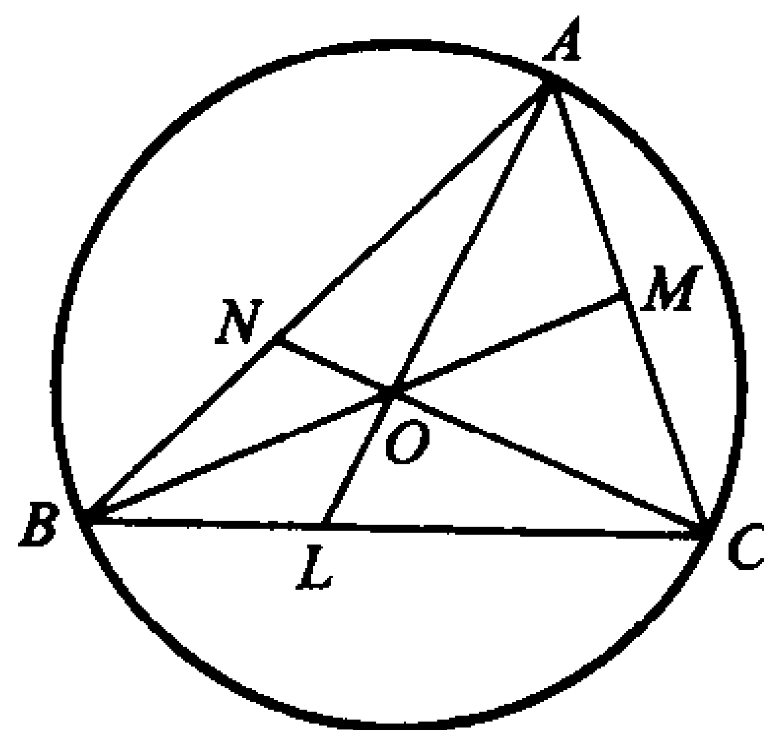


图 5－14

证明　任取一点为原点，则$\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB},\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AC}$，

而$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})\times(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})$

$=\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OC}$

$=\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OA}$.

又因为$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC},\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC},\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OR}\ \overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OA}$均为共线向量且方向相同，

所以$\dfrac{\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC}}{\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}}+\dfrac{\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}}{\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}}+\dfrac{\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OA}}{\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}}=1$.

由$\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC},\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$的几何意义得$\dfrac{\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{OC}}{\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}}=\dfrac{OL}{AL}=\dfrac{AL-R}{AL}=1-\dfrac{R}{AL}$.

同理$\dfrac{\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OB}}{\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}}=1-\dfrac{R}{CN},\dfrac{\overrightarrow{OC}\times\overrightarrow{OA}}{\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}}=1-\dfrac{R}{BM}$. 由此即可证.

从以上运用向量的线性运算、向量的三角形不等式及数量积、向量积等四个方面的例题中我们可以看出，用向量法求解平面几何问题通常需要按以下步骤

进行：

首先是建立恰当的向量坐标系，然后将问题中的条件、结论翻译成向量关系式，其次是设置好“媒介向量”. 很多时候条件中的向量关系式与结论中的向量关系式常常有距离. 例如，结论中出现的某些向量，条件中没有，这就需要在图形中选择出若干已知向量以这些向量为基础，将结论中出现的那些向量表示出来，以沟通已知和未知的关系. 但媒介向量的个数选取要恰当，少了不能达到证题目的，多了会使问题复杂化而不利于证题. 最后是化简或证明向量关系式. 从作为条件的向量关系出发应用向量性质，结合有关代数、几何知识，推得表示结论的向量关系式.

2. 复数法与复数法证题

复数 $z=x+yi(x,y\in \mathbf{R})$ 可以用点 $Z(x,y)$ 和向量 $\overrightarrow{OZ}$（O 为坐标系原点，即复平面原点）表示. 复数集与复平面上的点集及复平面上从原点出发的向量集（位置向量集）构成一一对应，因而复数的加、减法的几何表示就是向量的加、减法；用一个实数去乘复数的几何表示相当于数乘向量的运算. 若设 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，复数 z_1 与向量 $\overrightarrow{OZ_1}$ 对应，则 $z\cdot z_1$ 的几何意义是把向量 $\overrightarrow{OZ_1}$ 绕 O 点逆时针方向旋转 θ 角，再把 $|\overrightarrow{OZ_1}|$ 变为原来的 r 倍，而 $\frac{z_1}{z}(z\neq 0)$ 的几何意义则是把向量 $\overrightarrow{OZ_1}$ 绕 O 点顺时针方向旋转 θ 角，再把 $\overrightarrow{OZ_1}$ 变为原来的 $\frac{1}{r}$ 倍. 根据复数及其运算的几何意义，平面上某些图形的几何关系可以通过复数关系式来刻画，从而一些平面几何问题就可以通过一系列复数运算，巧妙地导出所需的结果. 我们把这种运用复数知识来求解问题的方法称为复数法.

由此也知，凡是利用向量知识能求解的几何问题，用复数法也可以解出. 但是，复数乘法的几何表示不同于向量的一般乘法（数量积或向量积），它表示为向量的拉伸与旋转的合成. 利用这一特点，使得复数在解决某些几何问题时，比向量更显得方便.

例 4 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 是两个不全等的等腰直角三角形，现固定 $\triangle ABC$，而将 $\triangle ADE$ 绕 A 点在平面上旋转. 试证：不论 $\triangle ADE$ 旋转到什么位置，线段 EC 上必存在点 M，使得 $\triangle BMD$ 为等腰直角三角形.

证法 1 把 $\triangle ABC$ 置放在复平面中，使 A,B,C 所对应的复数分别为 0，$ae^{\frac{\pi}{4}i}$，$\sqrt{2}a(a>1)$. 设 $AD=1$，则 D,E 所对应的复数分别为 $e^{\theta i}$，$\sqrt{2}e^{(\theta+\frac{\pi}{4})i}$，$CE$ 中点 M 所对应的复数为 $\frac{1}{2}(\sqrt{2}a+\sqrt{2}e^{(\theta+\frac{\pi}{4})i})$，于是 $|BD|=|ae^{\frac{\pi}{4}i}-e^{\theta i}|$，$|BM|=$ $\left|ae^{\frac{\pi}{4}i}-\frac{1}{2}(\sqrt{2}a+\sqrt{2}e^{(\theta+\frac{\pi}{4})i})\right|=\frac{\sqrt{2}}{2}|ae^{\frac{\pi}{4}i}-e^{\theta i}|$，$|DM|=|e^{\theta i}-$

$\frac{1}{2}(\sqrt{2}a+\sqrt{2}ae^{(\theta+\frac{\pi}{4})i})\Big|=\frac{\sqrt{2}}{2}|ae^{\frac{\pi}{4}i}-e^{i\theta}|$（其中注意到$\sqrt{2}=e^{\frac{\pi}{4}i}+e^{-\frac{\pi}{4}i}$）.

从而，$|BM|=|DM|=\frac{\sqrt{2}}{2}|BD|$. 由此即证$\triangle BMD$为等腰直角三角形.

证法 2　把$\triangle ABC$置放在复平面中，使得A,B,C所对应的复数分别为0，$ae^{\frac{\pi}{4}i}$，$\sqrt{2}a(a>1)$. 又设$AD=1$，D,E对应的复数为$e^{i\theta}$，$\sqrt{2}e^{(\theta+\frac{\pi}{4})i}$，并以$DB$为斜边作等腰直角三角形$DMB$（$D,M,B$按顺时针方向），点$D,M,B$对应的复数记为$\overrightarrow{D},\overrightarrow{M},\overrightarrow{B}$，于是$\overrightarrow{M}-\overrightarrow{D}=(\overrightarrow{B}-\overrightarrow{D})\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi}{4}i}=\frac{\sqrt{2}}{2}(a-e^{(\theta-\frac{\pi}{4})i})$，则

$$\overrightarrow{M}=\overrightarrow{D}+(\overrightarrow{M}-\overrightarrow{D})=e^{\theta i}+\frac{\sqrt{2}}{2}(a-e^{(\theta-\frac{\pi}{4})i})=\frac{\sqrt{2}}{2}(a+e^{(\theta+\frac{\pi}{4})i}),$$

故$\overrightarrow{M}=\frac{1}{2}(\sqrt{2}a+\sqrt{2}e^{(\theta-\frac{\pi}{4})i})$，这说明$M$是线段$EC$的中点.

证法 3　把$\triangle ABC$置放在复平面中，使得A,B,C所对应的复数分别为0，$e^{\frac{\pi}{4}i}$，$\sqrt{2}$（其中令$AB=1$），先设E在AC上，且设E对应的复数为λ，则$0<\lambda<\sqrt{2}$，且D点对应的复数为$\frac{\lambda}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi}{4}i}$. 当$\triangle ADE$绕$A$旋转任一角度$\theta$之后，$E$点对应的复数为$\lambda e^{i\theta}$，而$D$点对应复数变为$\frac{\lambda}{\sqrt{2}}e^{(\theta-\frac{\pi}{4})i}$，取$EC$的中点为$M$，则$M$点对应的复数为$\frac{1}{2}(\lambda e^{i\theta}+\sqrt{2})$，考察三点$B,M,D$所对应的复数，易见$\overrightarrow{M}(1+i)=\overrightarrow{M}\cdot\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}=\lambda\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}e^{(\theta+\frac{\pi}{4})i}+e^{\frac{\pi}{4}i}=\overrightarrow{D}\cdot i+\overrightarrow{B}$. 由此得出$(\overrightarrow{B}-\overrightarrow{M})i=\overrightarrow{D}-\overrightarrow{M}$，由此即证.

证法 4　因$|AB|>|AD|$，故B,D不重合. 把两三角形放置在同一复平面中，使BD中点为原点，BD所在直线为实轴，各顶点对应的复数用其顶点表示，且设$\overrightarrow{B}=-1$，$\overrightarrow{D}=1$，则$\overrightarrow{E}-\overrightarrow{D}=(\overrightarrow{A}-\overrightarrow{D})\cdot(-i)=-(\overrightarrow{A}-1)i$，从而$\overrightarrow{E}=\overrightarrow{D}-(\overrightarrow{A}-1)i=1-(\overrightarrow{A}-1)i$. 同理$\overrightarrow{C}=\overrightarrow{B}+(\overrightarrow{A}-\overrightarrow{B})i=-1+(\overrightarrow{A}+1)i$，设$BC$中点为$M$，则$\overrightarrow{M}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{E}+\overrightarrow{C})=i$. 这说明$\triangle BMD$为等腰直角三角形.

证法 5　把两三角形放置在同一复平面中，向量与对应复数可分别设为$\overrightarrow{BA}:z_1$，$\overrightarrow{DE}:z_2$，则$\overrightarrow{BC}:z_1\cdot i$，$\overrightarrow{DA}:z_2\cdot i$，$\overrightarrow{AC}:z_1 i-z_1$，$\overrightarrow{AE}:z_2-z_1 i$，从而

$$\overrightarrow{CE}:(z_1+z_2)-(z_1+z_2)i.$$

设M是所求的点，且记$\overrightarrow{CM}=\lambda\overrightarrow{CE}(0\leqslant\lambda\leqslant1)$，则$\overrightarrow{MB}=-(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CM})$，于是$\overrightarrow{MB}$

对应的复数 $z=-z_1\mathrm{i}-\lambda(z_1+z_2)+\lambda(z_1+z_2)\mathrm{i}=-\lambda(z_1+z_2)-(1-\lambda)z_1\mathrm{i}+\lambda z_2\mathrm{i}$,

则 $$z\cdot\mathrm{i}=(1-\lambda)z_i=(1-\lambda)z_1-\lambda z_2-\lambda(z_1+z_2)\mathrm{i}. \qquad (*)$$

又$\overrightarrow{MD}=\overrightarrow{ME}-\overrightarrow{DE}$,则$\overrightarrow{MD}$对应的复数

$$\begin{aligned} z' &= (1-\lambda)[(z_1+z_2)-(z_1+z_2)\mathrm{i}]-z_2 \\ &= (1-\lambda)z_1-\lambda z_2-(1-\lambda)\cdot(z_1+z_2)\mathrm{i}. \qquad (**) \end{aligned}$$

若$\triangle BMD$ 为等腰直角形,只需 $z\mathrm{i}=z'$,比较(*)、(* *)两式可知 $\lambda=1-\lambda$,即 $\lambda=\frac{1}{2}$,即 M 为 BC 中点.

习 题 5.3

1. 设 E 是$\angle AOB$ 的平分线上一点,C,D 分别在角的两边 OA,OB 上,且 $AD/\!/EB$,BC,EA. 求证:$AC=BD$.

2. 过正方形 $ABCD$ 的顶点 A 作$\angle EAF=45°$,角的两边交 BC,DC 于 E,F,又作 $AG\perp EF$ 于 G. 求证:$AG=AB$.

第四节 几类问题的证明方法

这一节讨论几类数量及位置问题的证明.

1. 关于线段、角的相等

证明线段或角的相等的途径很多,不胜枚举,常见的有:

(1) 利用全等三角形,寻找或构造两个三角形,使之各含欲证线段(或角),证这两三角形全等.

(2) 利用等腰三角形,将两线段化为同一三角形的两边、两边上的中线、高线或角平分线而证这两边之对角相等;将两线段化为被三角形的高线或对角平分线所分,且在同一边上的两线段,而证另两边相等;将相等两角化为一个三角形中的两角而证对边相等,线段相等与角度相等证明的互化多是借助等腰三角形.

(3) 利用平行四边形等特殊的多边形,化所证两线段或角为四边形(或多边形)的对边或对角而证该四边形是平行四边形(或特殊多边形);化两线段为四边形的对角线被另一对角线所截的两段而证四边形为平行四边形.

(4) 利用三角形内、外角平分线性质定理及逆定理,利用相似三角形或平行线性质可获得比例式而证两线段相等. 或证两线段之比等于其反比,或证两线段与同一线段等比,或与已知两线段各有等比.

(5) 利用三角形的面积关系:面积相等的两个三角形,(a) 若等底,则等高;反之亦真.(b) 若两对应边的乘积相等,则夹角对应相等或互补.

（6）圆内等量的利用：如（a）等圆心角对等弧、等弦、等弦心距；反之亦真.（b）垂直于弦的直径分弦为等线段.（c）相交两圆的连心线平分公共弦.（d）圆外一点到一圆的两切线等长.（e）两圆的外（或内）公切线等长.（f）同弧所对圆周角相等，一圆中等圆周角对等弦.（g）圆内接四边形的外角等于其内对角.（h）弦切角与所夹圆周角相等.

（7）利用等量公理.先证这两线段与已知的两线段各有同样的数量关系，或证两线段各与第三线段有同样的数量关系，角类同.

（8）利用边角关系计算.如利用正、余弦定理等.

（9）通过计算、代换等转换途径求解.

（10）利用几何变换：平移、反射、旋转等.

例 1 过$\odot O$的直径BA的延长线上一点P作圆的切线，设切点为Q，连接QO并延长交圆于R，再过P作圆的任一割线交圆于G,S两点.连结RG,RS分别交AB（或其延长线）于M,N.求证：$MO=ON$.

证明 过G作弦$GF\parallel AB$交RS于K，交RQ于E，取SG之中点D，分别连OD,ED和GQ，如图5－15.由$OD\perp SG,OQ\perp PQ$，知O,P,Q,D四点共圆，有$\angle OQD=\angle OPD$.又$GF\parallel AB$，有$\angle SGF=\angle OPO$，从而$\angle OQD=\angle EGD$，则E,G,Q,D四点共圆.故$\angle GQE=\angle GDE$.但$\angle GQE=\angle GSR$，则$\angle GDE=\angle GSR$，从而$ED\parallel RS$，由此有$GE=EK$.又$GK\parallel MN$，故$MO=ON$.

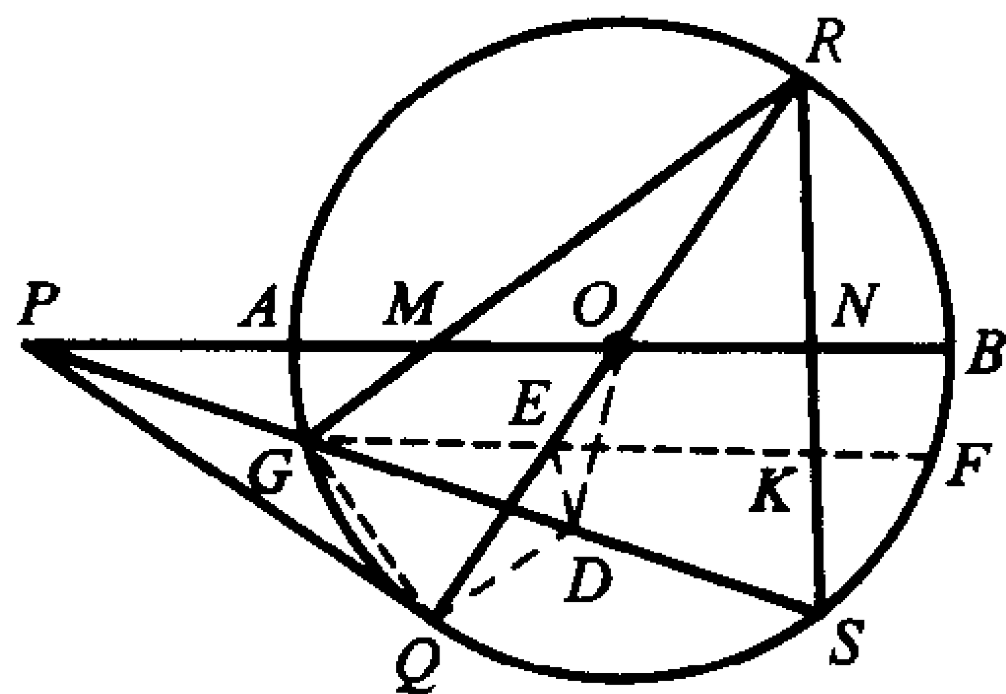


图5－15

例 2 AB是$\odot O$的弦，过AB的中点D任作一弦MN，设过A、B的两切线相交于P，如图5－16.求证：$\angle APM=\angle BPN$.

证明 连结OA,OB,OM,ON,OP，则P,A,O,B共圆.于是，有$AD\cdot BD=PD\cdot OD$.又在$\odot O$中有$AD\cdot BD=MD\cdot ND$，从而$PD\cdot OD=MD\cdot ND$，即知P,M,O,N四点共圆，又为$ON=ON$，则$\overset{\frown}{OM}=\overset{\frown}{ON}$，故$\angle OPM=\angle OPN$.又$\angle APO=\angle BPO$，则$\angle APM=\angle APO-\angle OPM=\angle BPO-\angle OPN=\angle BPN$.

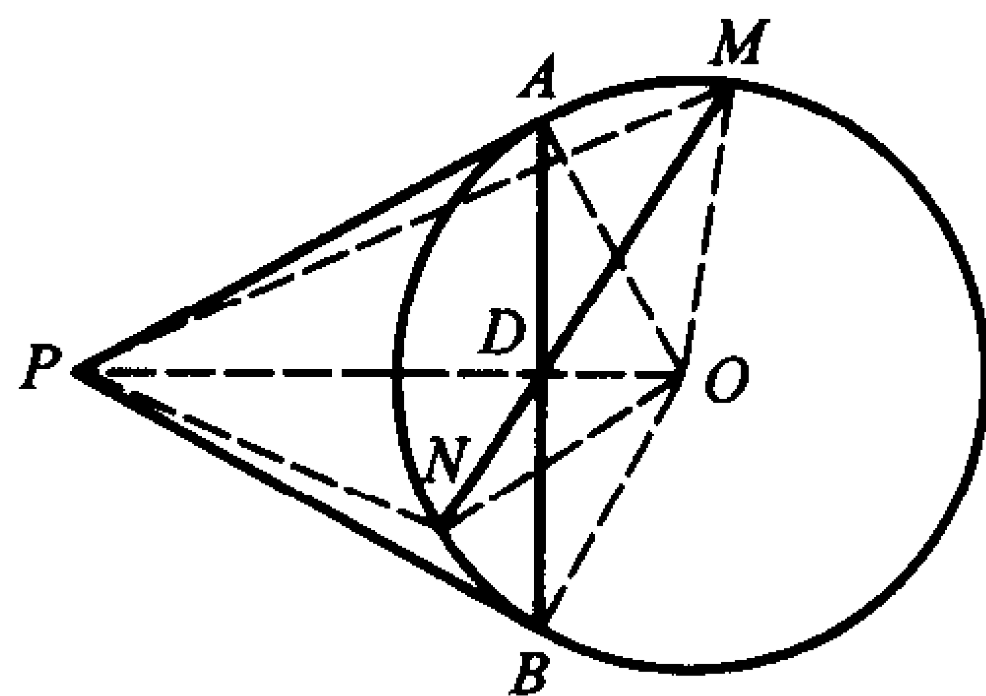


图5－16

2. 关于平行与垂直

证明两直线（线段）平行的常见思路有：

（1）利用平行线的基本判定定理：同位角相等或内错角相等或同旁内角互补时，两直线平行；平行（或垂直）于同一直线的两直线平行.

(2) 利用三角形或梯形的中位线性质定理.

(3) 利用平行四边形的性质.

(4) 利用平行线截得比例线段定理的逆定理.

(5) 利用同底等面积的两三角形的底边与另两对应点连线平行.

(6) 利用圆中夹等弧的不相交两弦(或一弦一切线)平行;过相交(或相切)两圆交点的两割线交两圆于四点,同一圆上两点所成弦平行.

(7) 利用几何变换证两线平行.

证明两直线垂直的常见思路有:

(1) 利用两直线垂直的定义(所成夹角为 90°)或判定定理,如垂直于两平行中的一条必垂直于另一条;相交得邻补角相等的两直线垂直等.

(2) 利用两边对应垂直的相似三角形的第三边互相垂直.

(3) 利用直角三角形判定定理,如利用勾股定理的逆定理证两边垂直;证三角形一边上的中线是该边的一半证两边垂直.

(4) 利用等腰三角形性质,顶角平分线(或底边中线)与底边垂直;利用菱形对角线互相垂直,利用三角形垂心性质.

(5) 利用圆的有关性质.如半圆上的圆周角是直角或过圆的弦中点的直线垂直于弦;两相交圆连心线垂直于公共弦.

(6) 利用一线段的两端到另一线段两端距离的平方差相等时,此两线段垂直,这是通过计算证明垂直的重要途径.

(7) 利用几何变换证两线垂直.

例 3　设 O 为四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 的中点,OE,OF,OG,OH 各为 $\angle AOB$,$\angle BOC$,$\angle COD$,$\angle DOA$ 的平分线,且分别和 AB,BC,CD,DA 交于 E,F,G,H,求证:$EF/\!/HG$.

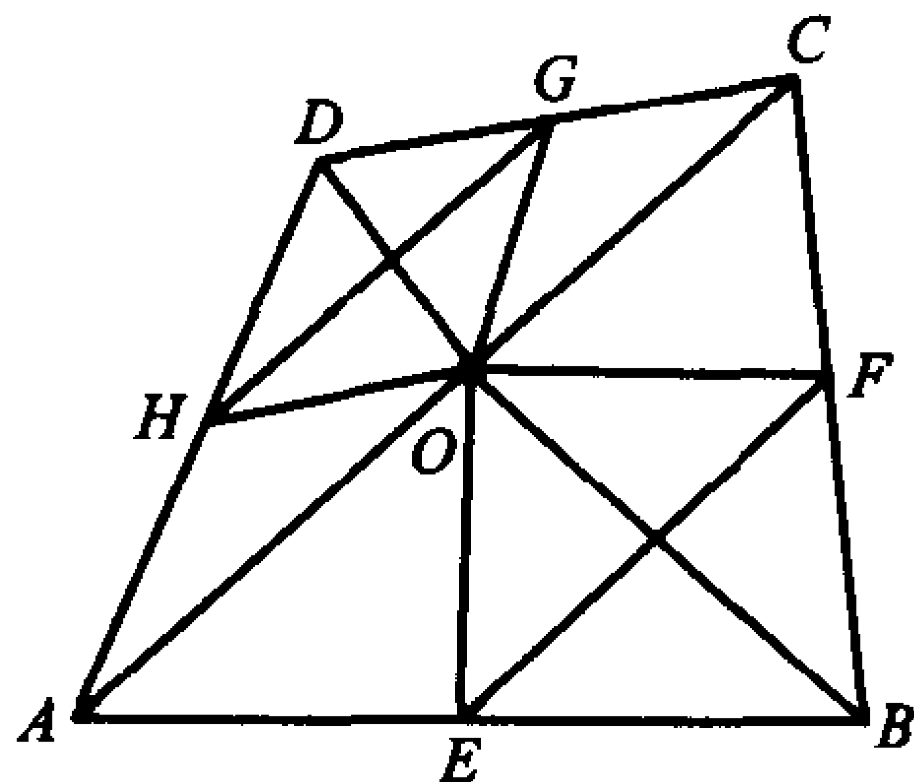


图 5-17

证明　如图 5-17.由 OE,OF 分别平分 $\angle AOB$,$\angle BOC$,则$\dfrac{OA}{OB}=\dfrac{AE}{EB}$,$\dfrac{OC}{OB}=\dfrac{CF}{FB}$.

又 $OA=OC$,则$\dfrac{AE}{EB}=\dfrac{CF}{FB}$,故 $EF/\!/AC$.

同理,$HG/\!/AC$,故 $EF/\!/HG$.

例 4　如图 5-18,从⊙O 外一点 P 引两切线 PA,PB,过 AB 上一点 M 引弦 CD,使 M 是 CD 的中点,过 C,D 再引⊙O 两切线并交于 Q 点.求证:$OQ\perp PQ$.

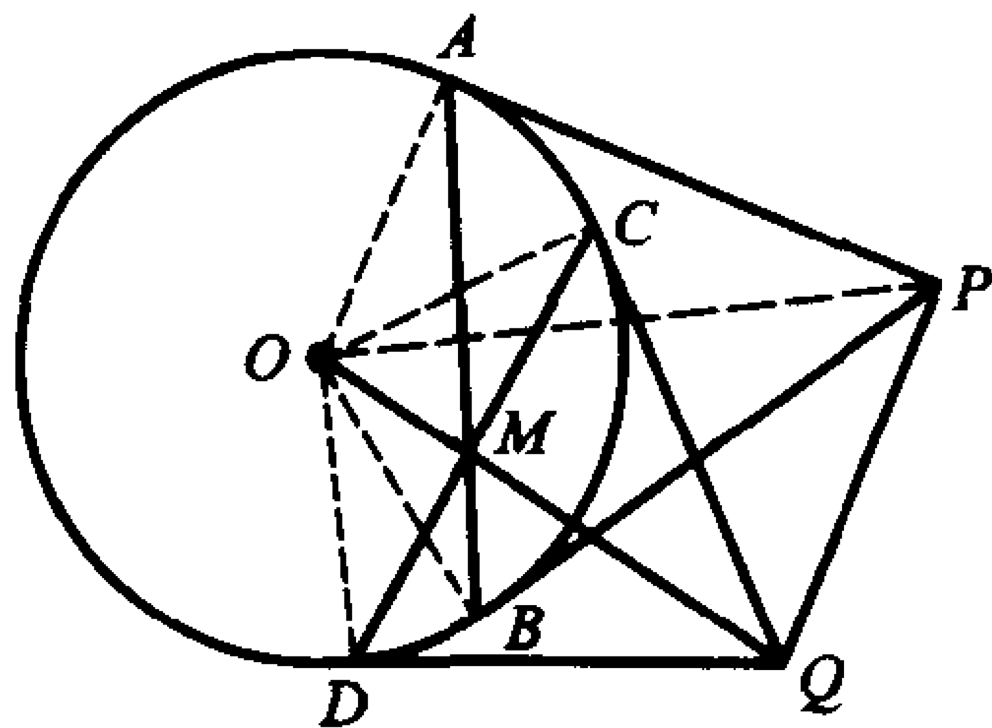


图 5-18

证明　连结 OA、OB、OC、OD、OP. 由 QC、QD 是$\odot O$ 的切线，知 $CQ=DQ$，且 OQ 垂直平分 CD. 而 M 是 CD 的中点，则 M 点在 OQ 上. 又 QC、QD 是$\odot O$ 的切线，有 O、D、Q、C 四点共圆，从而 $MC \cdot MD=MO \cdot MQ$. 又 $MC \cdot MD=MA \cdot MB$，有 $MO \cdot MQ=MA \cdot MB$，则 O、B、Q、A 四点共圆. 又 PA、PB 是$\odot O$ 的切线，则 A、O、B、P 四点共圆. 从而 A、O、B、Q、P 五点共圆，有$\angle PQO=\angle OBP=90°$，故$OQ \perp QP$.

3. 关于点共线与线共点

证明三点 X，Y，Z 共线的常见思路有：

(1) 适当地选取一条通过其中一点(如 X)的直线 PXQ，并连结 XY，XZ，当 Y，Z 两点位于 PQ 的两侧时，则证$\angle PXZ=\angle QXZ$ 或$\angle PXY+\angle PXZ=180°$；当 Y、Z 两点在 PQ 的同一侧时，则证$\angle PXY=\angle PXZ$.

(2) 利用平行或垂直，如证 XY，YZ 平行或垂直于同一直线.

(3) 证明三点在某一定直线上；证明两点连线与某定直线的交点是第三点.

(4) 证三点两两连结的线段有和差关系，或三点所成的三角形面积为零.

(5) 证得其中一点为对称(或位似)中心，其余两点为对称(或位似)图形的一双对应点.

(6) 利用梅勒劳斯定理的逆定理，或斯特瓦尔特定理的逆定理，或张角定理的逆定理；利用西姆松定理、欧拉定理等.

(7) 还可采用其他方法，如反证法等.

证明三直线共点的常见思路有：

(1) 化为点共线问题，即证明三直线中的两直线的交点与第三直线上的两点共线.

(2) 证明两直线的交点必在第三直线上.

(3) 证明得为三角形的巧合点(即外心、内心、重心、垂心、旁心等)，利用这些共线点结论.

(4) 利用塞瓦定理的逆定理.

(5) 利用对称(或位似)图形的对应点的连线共点于对称(或位似)中心.

(6) 利用根心定理，即圆心不共线的三圆两两相交(或相切)，其公共弦(或次切线)所在直线共点.

例 5　自圆上任一点 P 引三弦 PA，PB，PC，并各以它们为直径画圆，则所画三圆的每两两相交的除点 P 外的三交点共线.

证明　设为 PB，PC 为直径的两圆的非 P 点的交点为 X，以 PC，PA 为直径的两圆的非 P 点的交点为 Y，以 PB，PA 为直径的圆的非 P 点的交点为 Z. 则 B，C，X；C，A，Y；A，B，Z 都是共直线的.(图略)

连结 YZ,YX,PZ,PX,则$\angle XYC=\angle XPC,\angle ZYA=\angle ZPA$,且$\angle PXC=\angle PZA=90°$. 又由四边形 $PABC$ 内接于圆,则 $\angle PAZ=\angle PCX$,从而$\angle ZPA=\angle XPC$,于是$\angle XYC=\angle ZYA$,由此即知 YZ,YX 是同一条直线,故X,Y,Z 三点共线.

例 6 在$\triangle ABC$ 中以 BC 为直径的圆交 AB,AC 于 F,E. 证明:圆在 E,F 处的切线与高线 AD 共点.

证明 以 H 表示垂心,M 表示 E 点的切线交 AD 之点(图略),BHE、CHF 也是$\triangle ABC$ 的高线(E、F 为垂足),由弦切角与圆周角的关系得$\angle MEH=\angle MEB=\angle C$. 又因四点 H,D,C,E 共圆,$\angle C=\angle MHE$,于是在直角$\triangle AEH$ 中有$\angle MEH=\angle MHE$,由此断定 M 是斜边 AH 的中点.

同理,可证 F 点处的切线也过 AH 的中点.

4. 关于点共圆与圆共点

证明点共圆的途径常有:

(1) 利用圆的定义,证明各点均与某一定点等距.

(2) 证明连结各点所得凸多边形与某一圆内接凸多边形相似.

(3) 如果各点都在某两点所在直线同侧,且各角对这两点都张等角,则这些点共圆.

(4) 若凸四边形的对角互补或一外角等于内对角,则凸四边形四顶点共圆.

(5) 利用相交弦、切割线、割线定理的逆定理证四点共圆.

(6) 利用托勒迷定理的逆定理,或西姆松定理的逆定理等证四点共圆.

(7) 证明五点或五点以上的点共圆,可以分别证各四点共圆,且四点中有三点相同.

关于圆共点的证明思路常有:

(1) 证明几个圆共点,先确定可能共的点,然后利用点共圆的证明方法,分别证明该点在各圆上,从而将“圆共点”转化为“点共圆”问题证明.

(2) 证其中某两圆的交点在其他各圆上.

(3) 证各圆均过同一特殊点或某一点.

例 7 设 X,Y,Z 各为$\triangle ABC$ 的三边 BC,CA,AB 所在直线上的点,则$\odot AYZ,\odot BZX,\odot CXY$ 三圆共点.

证明 设 X,Y,Z 在三边上,$\odot BZX$ 与$\odot CXY$ 的交点 X 不在连心线上,设其第二交点为 O. 连结 OX,OY,OZ,由四边形 $OBZX$ 内接于圆,则$\angle DZB=\angle OXC$.

同理,四边形 $OCXY$ 内接于圆,有$\angle OXC=\angle AYO$.

于是$\angle BZO=\angle AYO$,从而 A,Y,O,Z 四点共圆,即 O 点在$\odot AYZ$ 上. 从而

$\odot AYZ$、$\odot BXZ$，$\odot CXY$ 共点.

当 X 在 $\odot BXZ$ 与 $\odot CXY$ 的连心线上时，易证三圆交于 X.

若 X,Y,Z 中有点在三边的延长线上时，其证明类似(略).

习　题　5.4

1. 在 $\triangle ABC$ 两边 AB 和 AC 上向外作正方形 $ABDE$ 和 $ACFG$，设 H,K,M 各为 BE,CG,BC 的中点. 证明:(1) $MH\perp MK$;(2) $MH=MK$.

2. 证明:三角形一顶点在其他两角内、外平分线的射影，是共线的四点.

3. 在四边形 $ABCD$ 中，对角线 AC 平分 $\angle BAD$，在 CD 上取一点，BE 与 AC 相交于 F，延长 DF 交 BC 于 G. 求证:$\angle GAC=\angle EAC$.

4. 通过圆内接四边形一顶点和邻接二边中点作圆，证明这四圆共点.

第五节　几何轨迹与尺规作图

1. 几何轨迹

在几何中，把具有某性质的点 P 组成的集合叫做具有这种性质的点的轨迹.

虽然轨迹和几何图形都是点集，但两者是有区别的，一般来说，图形(熟悉的特殊图形除外)是知其形(形状)而不知其性(构造规律和性质)，轨迹(熟悉的特殊轨迹除外)是知其性而不知其形. 我们研究轨迹问题，就是要探求适合一定条件的点的集合形成什么样的图形，使形和性得到完美统一.

令 L 为适合条件 φ 的点的轨迹，F 为具有某形状的图形. L，F 都是点集，前者只知其性，后者但见其形. 于是，"合乎条件 φ 的点的轨迹 L 是否是图形 F"的问题，即成为两个点集 L 与 F 是否相等的问题.

定义　若满足:(1) 适合条件 φ 的任一点都在图形 F 上;(2) 图形 F 上任一点适合条件 φ. 那么，图形 F 就是适合条件 φ 点的轨迹 L.

上述定义中的条件(1)称为轨迹的完备性(或轨迹的充分性);条件(2)称为轨迹的纯粹性(或轨迹的必要性). 完备性和纯粹性是轨迹的两大基本属性，是判断轨迹是否为适合某条件的图形的不可缺少的两个基本要素.

轨迹问题根据结论部分叙述是否完整可分为三种类型:

第Ⅰ类　命题结论中明确说明了轨迹图形的形状，位置和大小.

第Ⅱ类　命题结论中只说出了轨迹图形的形状，但位置和大小或缺，或叙述不全.

第Ⅲ类　命题结论中只说求适合某条件的轨迹，对轨迹图形的形状、位置和

大小没有直接提供任何信息.

第Ⅰ、Ⅱ类命题常为轨迹定理,第Ⅲ类命题一般称为轨迹问题.

有些轨迹命题比较复杂,还要用到一些最常见最基本的轨迹命题作为推求的基础.我们把一些最常见最基本的轨迹命题作为轨迹基本定理,列举如下:

定理 1 和一个定点的距离等于定长的点的轨迹是以定点为圆心,定长为半径的圆.

定理 2 和两个定点的距离相等的点的轨迹是连结这两个定点的线段的中垂线.

定理 3 和一条已知直线的距离等于定长的点的轨迹,是平行于已知直线且位于此直线两侧并和这直线的距离等于定长的两条平行线.

定理 4 与两条平行线距离相等的点的轨迹,是和这两条平行线距离相等的一条平行线.

定理 5 与相交两直线距离相等的点的轨迹,是分别平分两已知直线交角的互相垂直的两条直线.

定理 6 对已知线段的视角等于定角 $\alpha(0^\circ<\alpha<180^\circ)$ 的点的轨迹,是以已知线段为弦,所含圆周角等于 α 的两段弓形弧.

推论 对已知线段的视角为直角的点的轨迹,是以已知线段为直径的一个圆.

以上列出的是平面几何中的基本轨迹定理,对于空间中基本轨迹定理,可将上述定理 1 至定理 5 中的"圆"改为"球",恰当地将"直线"改为"平面","条"改为"个"即得 5 条定理,分别为:

定理 7 和一个定点的距离等于定长的点的轨迹是以定点为球心,定长为半径的球.

定理 8 和两条定平行线距离相等的点的轨迹是这两平行直线公垂线段的中垂面.

定理 9 和两条定相交直线距离相等的点的轨迹,是通过这两条直线所成角的平分线.且与已知两直线所在平面垂直的两相交平面.

定理 10 和一条定直线的距离等于定长的点轨迹是以这条定直线为轴,半径等于定长的一个圆柱面.

定理 11 和一条定线段的两端连线所张的角等于直角的点轨迹,是以这条定线段为直径的一个球面.

下面讨论轨迹的求解:

第Ⅰ类型的轨迹题,是结论指明了轨迹图形的形状,位置和大小的问题.因此,只要给予证明即可,这类问题的求解的步骤为:写出已知与求证,证明完备性

与纯粹性，作出结论.

例1　动梯形 $EFGH$ 的一底 EF 的两端分别固定在 $\triangle ABC$ 的两边 AB，AC 上，$EF /\!/ BC$，另一底 GH 的端点分别在 AC，AB 上滑动. 求证：GH 的中点 P 的轨迹是 $\triangle ABC$ 的中线 AD.

证明　(1) 完备性：设 P 为动梯形 $EFGH$ 一底 GH 的中点，连结 AP 交 BC 于 D，由 $GH /\!/ EF /\!/ BC$，有 $HP : BD = PG : DC$，故 $BD = DC$，即 P 点在中线 AD 上(如图 5－19).

(2) 纯粹性：设 P' 为 $\triangle ABC'$ 的中线 AD 上的任一点，过 P' 作 $H'G' /\!/ EF$ 交 AB，AC 于 H'，G'，由 $H'P' : BD = P'G' : DC$ 知，$H'P' = P'G'$，则 P 符合条件.

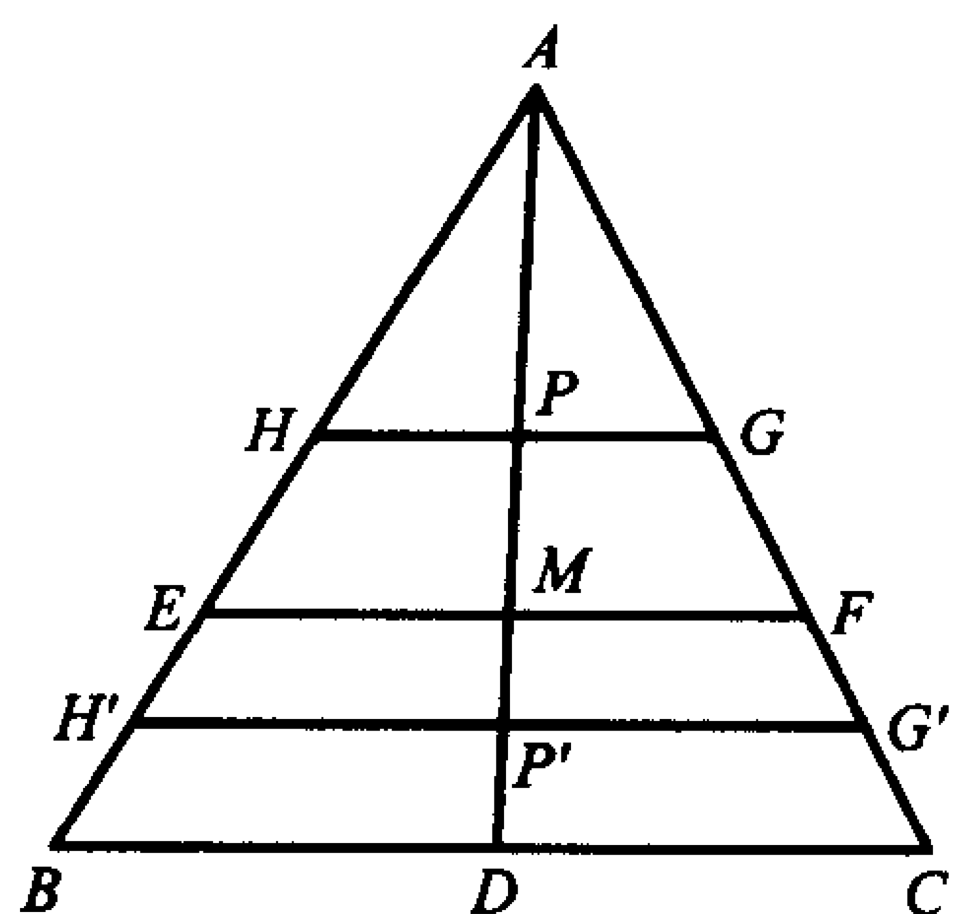


图 5－19

综合(1)、(2)，P 点的轨迹是 $\triangle ABC$ 的中线 AD(A 点以及 AD 与 EF 的交点 M 除外).

注　上例的纯粹性证明中，P' 点不能取 A 点或 M 点. 这是因为当 P' 与 A 重合时，梯形 $EFGH$ 已退化为 $\triangle AEF$；同样，当 P' 与 M 重合时，梯形 $EFGH$ 退化为一线段 EF. 由此可见，A，M 是动梯形 $EFGH$ 一底 GH 的中点极限位置，它们本身不符合轨迹条件，但在它们任意小的邻域内都有符合条件的点，我们把这种点叫做轨迹的**极限点**. 其中 A 与 M 又有所不同，它处于轨迹的边界位置，这种处于边界位置的极限点叫做轨迹的**临界点**. D 点也处于边界位置，但它本身却符合条件，这种处于边界位置的符合条件的点称为**终止点**. 极限点、临界点、终止点常常能够反映轨迹图形的位置或形状，虽然极限点、临界点不是轨迹上的点，但由于它们对轨迹的探求有一定的作用. 如一一排除将使叙述增添许多麻烦，同时也使轨迹图形发生中断现象. 因此，不妨把它们也列入轨迹之中，或者在最后结论中加以说明.

第Ⅱ类型的轨迹题，结论只给出轨迹形状，而位置大小或缺，或叙述不全，因而需进一步探求. 完全确定轨迹的位置、大小应是首先要进行的工作、整个求解过程包括写已知与求证，探求、证明完备性与纯粹性，讨论等步骤.

第Ⅲ类型的轨迹题，是以问题形式出现，题中没有叙述轨迹的形状、位置和大小，这些均须探求，有时探求还是比较艰难的. 虽然如此，但一经确定轨迹之后，往往证明的方法就附带解决了. 求解步骤与Ⅱ类轨迹题相同.

轨迹的探求，一般有解析法和综合法，在综合法中，常采用描迹法、几何变换法、条件代换法等方法.(例略)这可见中学课本中的例.

2. 尺规作图

在传统的几何作图中，尺规作图是指用没有刻度的直尺和圆规两件工具，并用有限次步骤作出合乎预先约定条件的图形，有时也叫欧几里得作图.

所谓完成了一个尺规作图，就是说能把问题归结为有限次的如下几个认可的简单作图：

(1) 通过两个已知点可作一条直线；

(2) 已知圆心和半径可作一个圆；

(3) 若两已知直线相交，或一已知直线和一已知圆(或圆弧)相交，或两已知圆相交，则可作出其交点.

并且约定，在已知直线上或直线外，均可取不附加任何特殊性质的点.

上面三条叫做作图公法，是尺规作图的理论依据. 若一个作图不能有限次根据公法作出图形，则叫做几何作图(或尺规作用)不能问题、数学史上的"化圆为方"，"倍立方体"、"三等分任意角"就是尺规作图不能问题. 这已在高等代数课程中论述过.

我们把根据作图公法或一些已经解决的作图题而完成的作图，叫做作图成法，它可以在以后的作图中直接应用. 下面列举一些：

(1) 任意延长已知线段.

(2) 在已知射线上自端点起截一线段等于已知线段.

(3) 以已知射线为一边，在指定一侧作角等于已知角.

(4) 已知三边，或两边及夹角，或两角及夹边作三角形.

(5) 已知一直角边和斜边，作直角三角形.

(6) 作已知线段的中点.

(7) 作已知线段的垂直平分线.

(8) 作已知角的平分线.

(9) 过已知直线上或直线外一已知点，作此直线的垂线.

(10) 过已知直线外已知点，作此直线的平行线.

(11) 已知边长作正方形.

(12) 以定线段为弦，已知角为圆周角，作弓形弧.

(13) 作已知三角形的外接圆，内切圆，旁切圆.

(14) 过圆上或圆外一点作圆的切线.

(15) 作两已知圆的内、外公切线.

(16) 作已知圆的内接(外切)正三角形、正方形，或正六边形.

(17) 作一线段，使之等于两已知线段的和或差.

(18) 作一线段，使之等于已知线段的 n 倍或 n 等分.

(19) 内分或外分一已知线段，它们的比等于已知比.

(20) 作已知三线段 a,b,c 的第四比例项.

(21) 作已知两线段 a,b 的比例中项.

(22) 已知线段 a,b 作一线段为 $x=\sqrt{a^2+b^2}$,或作一线段为 $x=\sqrt{a^2-b^2}(a>b)$.

还可以举出一些.(略)

下面介绍作图题的分类与作图步骤.

根据题设条件(满足无矛盾性,独立性、存在性)不同,即所作图形的形状、位置、大小的要求不同.一般作图题可分为定位作图(在指定位置上作图)与活位作图.

解作图题的步骤一般分为:写出已知(详细写出题设条件,并用相应符号或图形表示),与求作(说明要作的图形是什么,以及该图形应具有的题设条件),进行分析(寻求作图线索),写出作法.证明,并进行讨论.

常用的作图方法有交轨法、三角形奠基法、变换法、代数法等.变换法中又包含变位法、位似法、反演法等.

交轨法:一些作图题,常归结为确定某一点的位置,而点的位置确定,一般需要两个条件,于是可以分别作出只符合一个条件的轨迹,则这两个轨迹的交点即为所求的点,这种利用轨迹的交点来解作图题的方法叫做交轨法.

三角形奠基法:对于某些作图题,若可以先作出所求图形的某一个三角形,便奠定了整个图形的基础,这种用某个三角形为基础的作图方法叫做三角形奠基法.

变位法:把图形中某些元素施行适当的合同变换,然后借助于各元素的新旧位置关系发现作图的方法,叫做变位法.

位似法:作图时,常先舍弃图形的大小、位置条件(或部分位置条件),作出满足形状要求的图形 F,然后选择适当的位似中心和位似比,作出符合大小要求(或位置要求),并与 F 位似的图形,这种利用位似变换性质解作图题的方法,叫做位似法.

反演法:对于与圆有关的一类作图题,可以利用反演变换的性质来解作图题的方法,叫做反演法.

代数法:有些作图题常归结为求作一条线段,而这未知线段的量可以用一些已知线段的代数式来表示,于是根据这个代数式先作出所求线段,然后再完成整个图形,这种借助于代数运算来解作图题的方法叫做代数分析法,简称代数法.

用代数法作图的关键在于寻找能用已知量的代数式来表示所求作的线段,根据作图公法和作图成法我们有下列结论:

结论 1　含已知线段 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的一次齐次式 $F(a_1,a_2,\cdots,a_n)$,若其中仅含有限次加,减、乘、除、开平方五种运算,并且 F 在定义域中能取实值,则此值

对应的线段可用尺规作图.

结论 2 设 A、B、C 分别是仅含有限次加、减、乘、除、开平方运算的零次齐次式、一次齐式，二次齐次式，即可以用尺规作出方程 $Ax^2+Bx+C=0$ 的实根.

例 2 求作一圆，使通过两定点 A，B 并切于已知直线 l.

分析 设问题已解，求作圆切直线 l 于 T，若能确定 T 点的位置，那么通过 A，B、T 的圆就是所求的了.

假设直线 AB 和 l 相交于一点 O，那么 $x=OT$ 满足关系 $x^2=OA\cdot OB$，即 x 是线段 OA 和 OB 的比例中项. 若直线 AB 与 l 不相交，则 AB 的中垂线与 l 相交.

作法 若连 AB 交 l 于 O，则作 OA 和 OB 的比例中项，在 l 上定 T 点使 OT 等于这比例中项，过 A，B，T 所作的圆为所求. 若 AB 所在直线与 l 不相交，则作 AB 中垂线与 l 相交于 T，过 A，B，T 所作的圆为所求.

证明 若连 AB 与 l 交于 O，由作法 $OA:OT=OT:OB$，于是 $\triangle OAT$ 和 $\triangle OTB$ 有一角相等且夹边成比例，这两三角形相似，从而 $\angle ABT=\angle OBT=\angle OTA$，故推出 OT 切于圆，若连 AB 与 l 不相交时，作的圆显然与 l 相切.

讨论 当直线 AB 与 l 相交于一点且 A，B 在 l 同侧时，有二解；A、B 在 l 异侧时无解. 当 $AB/\!/l$ 或 AB 之一在 l 上时，有一解，当 A、B 都在 l 上时无解.

例 3 试用作图的方法，说明两个三角形，只有两边一角相等，不能推得两三角形全等. 但对该角为钝角，这是对的.

这只要直接作图便知. 设 a，$\angle B$ 和 c 为已知，则图 5－20 表明，还可能有，a，$\angle B$、c' 的解. 但在图 5－21 中，则只有一解.

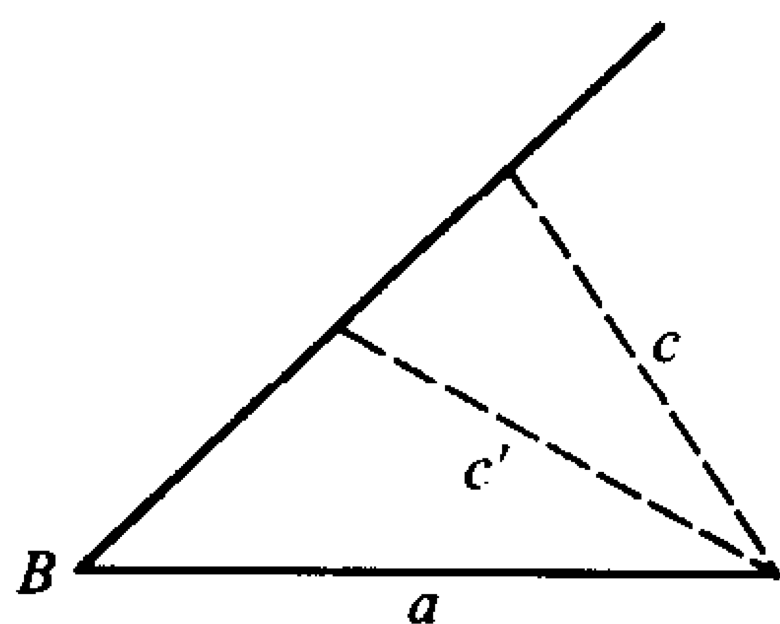


图 5－20

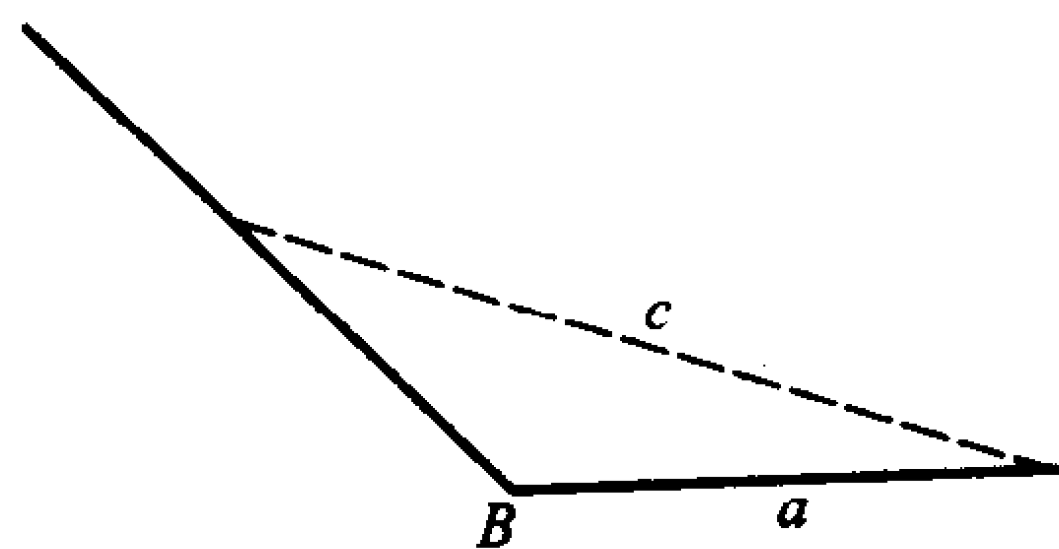


图 5－21

习 题 5.5

1. 已知两边的积、夹角的大小，第三边的长，求作三角形.
2. 在定圆内求作内接正十边形.
3. 给定五边形各边中点，求作此五边形.

第六章　中学几何教学综述

古希腊的数学以几何学为中心. 欧几里得的《几何原本》,可以说集古希腊几何学之大成,也可以说是古希腊整个数学的总结. 文艺复兴之后,代数登堂入室,笛卡儿借用代数方法创立了坐标几何,并以微积分的辉煌成就取代几何学成为数学的中心. 进入 20 世纪下半叶,计算机出现了. 信息时代的一切都在数字化,人类对几何学的认识发生了变化. 一方面,“几何学万岁”的口号,显示了人们对几何学的热爱和重视. 另一方面,几何学进一步代数化. 学校中欧氏几何教学内容被一再缩减. 于是,几何教学成为当代教育改革的一个核心课题. 本章综述中学平面几何与平面解析几何教学的有关问题. 立体几何的教学在第七章论述.

第一节　国际视野:平面几何教学的历史变迁

一直到 19 世纪中叶,欧几里得的《几何原本》始终是中学里的主要教材. 大数学家庞加莱(H. Poincare,1854—1912)曾经描写过当时的几何教学:

教室里 J 先生对学生说“圆周是一点到同一平面上等距离点的轨迹.”学生们抄在笔记本上,可是谁也不明白圆周是什么. 于是先生拿粉笔在黑板上画了一个圈,学生们立刻欢呼起来“呵! 圆周就是圆呵,知道了.”庞加莱指责这样的数学教育到处都有.

1900 年,英国培利(Perry,1850—1920)发动了数学教育改革运动,矛头指向欧几里得的《几何原本》. 培利说:“我们再也没有欧几里得时代那样多的空闲时间了”.

此后,中学里的几何课本,都根据《几何原本》的思想重新编写,比较容易懂. 例如,1919 年五四运动之后,在中国比较通行的有《三 S 平面几何》《温德华氏平面几何》等等.

20 世纪 60 年代,法国布尔巴基学派的元老,“新数”运动的精神领袖、著名数学家狄多内(J. Dieudonne,1906—1992)发出了“逐客令”,提出了“欧几里得滚蛋(Euclid must go!)”的口号(1959). 与此同时,东方的中国也出现“打倒欧家店”的提法,以此作为数学教育改革的目标之一(1960).

数学教育的每一场改革风暴为什么都从欧氏几何开始呢?

请看狄多内的看法. 他认为“欧几里得几何是以落后于时代的方法和思维方

式所堆砌的一堆遗物","对现代的数学工作者来说,只不过像供消遣的幻方和国际象棋一样".因此,他认为"作为一门科学来说,欧几里得几何已经死了".

狄多内的同胞,数学最高奖——菲尔兹奖获得者托姆(R. Tome)对"新数学"运动一直持反对态度.他在《"新数"是教育和哲学上的错误吗?》(刊于《科学美国人》59卷,1971)指出:

"训练学生的最低限度要求,也必须包含一些并不实用的,不计回报的部分,否则无法完成训练任务.……在一个只包含"有用"成分的学习课程里,无法唤起个人的积极进取精神.……欧几里得几何经常涉及对基础部分的直观理解,它没有功利性的回报,却最富有意义."

1980年,新数学运动宣布失败,提出的新口号是"回到基础".美国的一项报告,典型地表现了人们对取消几何的焦虑.

"在美国全体中学生里,47%不学几何,6%虽然学几何但中途退出,7%学习'不加证明'的几何(学证明但根本不会证明).9%只会一般的证明,7%取得中等水平的成功,13%能顺利地完成证明"(Usiskin,1982).

"欧几里得从学校里消失了!在一次调查中,初中一年级和二年级学生都不知道欧几里得.82名初三学生只有一个人说得出欧几里得的事情.要知道,数学课本中有一页介绍,他们本来应该知道的."(日本,横地清,1988).

"在新数学运动之后,几何已经呈现衰退趋势,此后讲授的几何就更少了.定理的证明不再作为要求.……回到基础的运动并没有使得取消过的几何得以恢复."(新加坡,李秉彝等,1986).

几何教学为什么会落到这步田地?原因在于社会环境对几何教学是不利的.第一,中学数学受大学数学影响.分析和代数在大学课程中占主要地位,而几何课很少.第二,企业和商业越来越依赖于统计、运筹学和数值分析.要适合中学生就业需要,就得多教些统计,这挤掉了几何课程.第三,最大的威胁来自计算机科学.离散数学、算法的新要求使得课程设计者不得不削减几何方面的要求.计算机只"懂"代数不"懂"几何更促使几何的代数化.形势不利于欧几里得几何的恢复,更不要说发展了.

当今几何学的现状是将托姆和狄多内两种极端观点进行折中.例如采取直观几何,度量几何,到论证几何的三步曲,将原来欧氏几何的内容加以分割,进行螺旋式组合.尽管这远非昔日的"欧氏演绎体系",但还是相对集中地保留了欧氏几何的某些内容.

另一种处理方法是变换几何.过去人们总习惯把变换几何与欧氏几何对立起来.现在已找到一种两全其美的方案."对顶角相等"、"平行线的同位角相等"等都可以用图形旋转和平移的方法加以论证.勾股定理也基于对称和投影变换

来得出(见本节附录). 此外,向量几何的发展,使原来的坐标式的解析几何获得了新的面貌. 这符合代数化的趋势.

附录 用投影法证明勾股定理

(1985年法国国民教育部数学教育委员会执行主席马蒂内(Martinet)访华讲演时提到)

命题 如图6-1,已知锐角O,从一边上任何点P向另一边作投影,垂足为Q,$OQ=\alpha\cdot OP$,$0<\alpha<1$. 则从另一边上任何点P'向该边作投影(垂足为Q'),必将有

$$OP'=\alpha\cdot OQ'.$$

证明 先用相似三角形定义解决点P的任意性问题,即α不因点P的不同而改变,然后将角O作角平分线. 用对称观点说明P可变为P',Q可变为Q',因而α不变.

现在证明勾股定理,如图6-2.

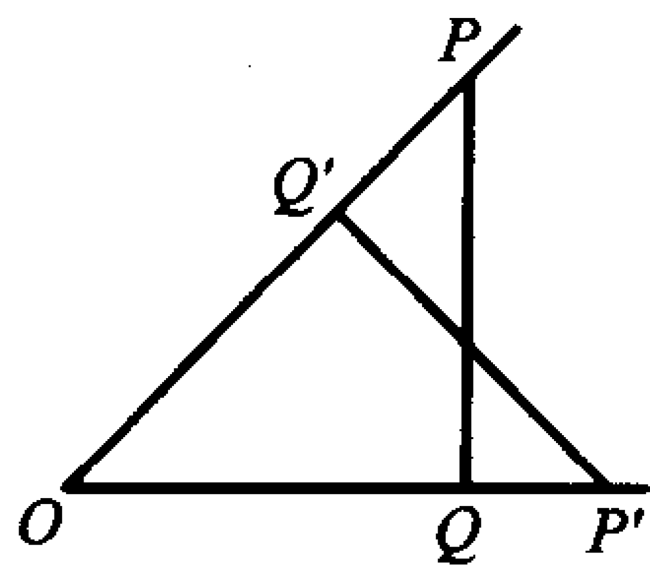


图6-1

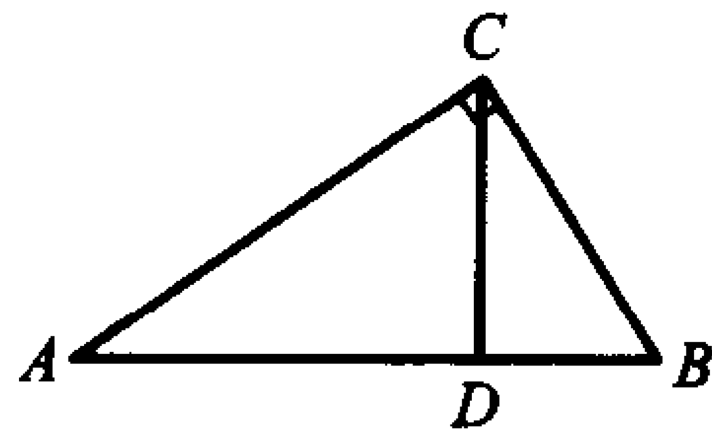


图6-2

由命题,在角A中,$AC=\alpha AB$,$AD=\alpha AC$,故$AD=\alpha^2 AB$. 在角B中,$BC=\beta AB$,$DB=\beta BC$,故$DB=\beta^2 AB$.

但$AB=AD+DB=\alpha^2 AB+\beta^2 AB=(\alpha^2+\beta^2)AB$,故$\alpha^2+\beta^2=1$. 于是从$AC^2=\alpha^2 AB^2$,$BC^2=\beta^2 AB^2$立知$AC^2+BC^2=(\alpha^2+\beta^2)AB^2=AB^2$. 证毕.

(此证法运用投影、对称等动态观点处理直角三角形的各边关系,别具一格)

第二节 半个世纪以来的中国平面几何教学

1607年,明末的徐光启与利玛窦合作翻译了《几何原本》,将拉丁文的Geometria的"Geo"音译为"几何",一直沿用至今. 但是,这部著作并没有引起当时知识界的重视. 真正将几何学作为中小学课程的内容,是在辛亥革命之后,特别是1919年的五四运动之后.

1949年以前,几何教学的分量很重. 平面几何的论证要求很高,习题相当

难. 例如,九点圆、西摩松线之类的问题,会出现在初中毕业考试中,学生不得不记住这些证明.

20 世纪 50 年代,中国全面学习苏联. 平面几何教材苏联化,主要采用吉西略夫编写的《几何》教材的体系. 先是翻译,后来加以改写,体系未变. 苏联教材着重"函数"思想,对几何学的公理化体系十分重视,论证也非常严密,但是总体内容减少了,诸如九点圆之类的问题不再出现在教材之中,例题和练习题的难度也不高. 这是一个明显的进步.

文革十年,几何学被"划线"、"度量"等实用性内容所取代. 1976 年之后,迅速恢复到 20 世纪 60 年代的水平. 整个 20 世纪 80 年代的几何教学,并没有太大的变化.

1990 年使用的数学教学大纲,平面几何的内容共有 198 课时. 其中初中二年级 102 课时,每周 3 课时;初三 96 课时,也是每周 3 课时. 内容仍然中规中矩. 其中有平行公理,尺规作图,平行线分线段成比例定理,线段的内、外分点,三角形的内心外心,两圆的公切线,相交弦定理,切割线定理,四种命题,反证法,轨迹等典型的欧氏几何特征.

到了 1992 年,平行公理淡化了,在大纲中没有出现. 轨迹、反证法、弦切角定理、切割线定理等都打上了星号. 尺规作图改成了基本作图. 此后,几何内容逐渐减少. 到了 2000 年,由于实行 5 天工作制,学校的课时大幅度缩减,人民教育出版社出版的数学教学大纲中,平面几何的内容和要求进一步降低. 但是,仍然保留了原有的论证几何的体系.

20 世纪 80 年代末,上海开始进行地方性的课程改革. 其中数学课程中的平面几何部分,实行"实验几何"与"论证几何"的两个循环. 初中二年级,先通过观察、操作获得几何知识,然后在初三进行严格论证. 论证的要求自然有所降低. 但是,论证几何的总体要求没有改变.

可以说,直到 2000 年,中国仍是平面几何教学水平最高的国家之一. 就在这一年,国家启动新一轮的课程改革. 数学课程首当其冲. 2001 年 7 月率先推出《九年义务教育数学课程标准(实验稿)》,并且立即在一些实验区使用,以后迅速推广. 到了 2004 年,使用数学新编教材的实验区已经覆盖了全国 90%以上的县.

2005 年初,开始了一场大规模的争论,核心正是关于平面几何的处理.

《九年义务教育数学课程标准(实验稿)》(以下简称"新课标")对几何的处理意见是:

- 国家实行九年义务教育制度,以前精英教育采用的几何体系应该彻底改革. 重点是丰富对空间图形的认识和感受,不再从整体上维持平面几何的演绎体系.

- 据调查，多数初中学生不能够理解“公理化”的几何思想．几何学必须贴近学生的日常生活实际．
- 注重学生经历观察、操作、推理、想像等探索过程．欣赏并体验变换在现实生活中的广泛应用．尽量使用“量一量，做一做”等操作性的活动．例如，三角形内角和为 180 度，是通过量、拼等方法得到的．
- 注重对证明本身的理解，而不追求证明的数量和技巧．新课标规定只证明 8 个命题，而且练习和考试与证明有关的题目难度，要和这 8 个命题的论证难度相当．

“新课标”发表以后，立即编写教科书，迅速推广．推广过程中，据教育部有关的资料，受到大多数数学教师的欢迎．到 2005 年已经覆盖 90%的县市．在此期间，有许多赞成的意见，也有许多批评的意见[①]．中国数学会教育工作委员会，在 2005 年 2 月 23 日举行扩大会议，对《9 年义务教育数学课程标准》提出了许多批评意见[②]．大多数发言都批评了“新课标”对平面几何的处理．归纳起来，有以下几点：

- 基础数学是人类文明中的核心部分．中学数学教育应该担负起理性文明、科学启蒙的使命．现在，取消平面几何的体系，降低中学数学教育的水准，和我国教育发展方向背道而驰．
- 数学贴近生活不能过头．几何学很多问题是理性思维的问题，并不和生活有多大联系．
- 新课标忽视演绎推理，把证明都改成说理．例如，三角形内角和 180 度，不能量一量就算得到真理．老是量，就倒退到尼罗河时代去了．
- 培养理性思维需要载体，几何是最好的载体．新课标说要讲什么是证明，却只能讲 8 个命题．但是培养几何的推理能力需要学生“做”推理．光讲什么是命题，什么是推理，什么是证明，学生是学不会的．
- 几何学是一个体系，支解成一段段的知识是不行的．减轻负担要精中求简，不能随意砍掉．

关于平面几何教学的争论还在继续之中．真理越辩越明，争论有利改革．数学教学的改革需要稳步进行．

那么，中国学生能不能学会平面几何呢？这里，让我们引用 1997 年发表的一次调查[③]的结果：

---

① 李大潜．对中学数学教育的一些意见．《数学教学》2003 年第一期

② 《数学通报》2005 年特刊

③ 谢安邦、谈松华．全国义务教育学生质量调查与研究．上海：华东师范大学出版社，1997：238

“代数得分率高于几何得分率，且差异显著($t=16.60, p<0.01$)．但一个有趣的现象是几何满分人数(2003 人)反而比代数满分人数(1 424 人)多．

学生的代数成绩比几何成绩高．解答题上学生代数和几何的得分率几乎是一样的，但在基本题的得分率上两者却有很大差异，代数成绩比几何成绩好．其原因在于学生解答几何基本题上表现较差，而对代数基本知识和基本技能的掌握较好”

这一结论表明，对初中学生来说，首先是几何比代数难学，许多学生连基本题也做不好；其次是“两极分化”，优秀学生喜欢几何，几何满分的人数比代数满分的人数多．

看来，几何对许多学生来说的确很难，应当减轻他们的负担．但是许多优秀学生能够学会几何，而且学得不错．因此，不同的人学习不同的几何，恐怕是我们应当做的事．

第三节　平面几何教学与理性思维能力的培养

半个世纪以来，中国的平面几何教学积累许多成功的经验，可以说是中国现代教育的宝贵财富之一．

一、关于平面几何入门教学

平面几何是中学生从直观、操作性数学学习转向理性思维、演绎推理、证明性学习的关节点．因此，注意入门教学，帮助学生顺利地完成这一过渡，就显得十分重要．

首先要引导学生突破概念关．在平面几何开始部分中有 20 多个重要概念，需要从直观出发，形成抽象的认识．特别是要求将这些概念从自然语言，转到严格的数学语言加以表述．例如，角的概念，人们早已建立．但是，作为数学的表述，就比较严密，而且还有动态和静态的两种定义．此外直线、线段、射线三个概念之间，既有区别也有联系．需要注意辨别．

其次，要注意引导学生突破几何语言关．几何语言比较规范、严谨，按其叙述方法又可分为文字语言和符号语言，按用途可分为描述性语言，推理语言和作图语言．对于文字语言，教学中应力求生动，形象、准确．通过教者示范，强调阅读教材，通过几何图形以及反例等予以强化，使其掌握“所有”，“凡”，“延长”、“连接”、“截取”、“对应”、“相似”、“相等”、“在…之上”等述语的用法．符号语言是推理论证的基础，教学中要引导学生将概念符号化，通过范句、范式养成使用的规范化，并进行文字语言和符号语言互释、互译的练习．

第三，要注意引导学生突破图形关. 要教会学生具体的画图方法与技巧. 适当地画出几何图形，如任意三角形不可画成等腰三角形，等腰三角形不可画成等边三角形. 分清实线、虚线的用法，更重要的是要培养学生具有一定的看图、识图能力. 例如，在图形中能分清有几个角，有多少个三角形等等.

第四，培养学生的逻辑推理能力. 一步步地帮助学生对照图形，分清已知条件和未知条件. 正确写出已知、求证. 学会引用定理，说明理由. 分清命题结构，掌握一定的书写格式. 在寻求思路的基础上，运用"三段论"进行论证. 学会添置辅助线.

二、在简单的推理证明中，加强理性思维的重要性阐述

几何教学的目的是培养理性思维精神，应该从进行简单推理时就不断地孕育、渗透、阐述. 学生只证定理做题目，却不知道为什么要这么做，就如同"猪八戒吃人参果"，吞到肚里还不知道滋味. 一些优秀的教师就能够注意阐发古希腊的理性思维的伟大精神价值. 几何内容削减以后，在一些最基本的推理中加强思维培养，是可取的一种方法. 举例如下.

最简单的几何命题是"对顶角相等". 如图 6-3，两条直线相交，那么角 A 等于角 B. 产生的问题是，这样简单的问题，究竟要不要证明？

这个结果一眼就看出来了！这还要证明吗？那不是自找麻烦吗？

在世界名著欧几里得编写的《几何原本》中，"对顶角相等"是命题 15. 证明如下：$\angle A+\angle C$ 是平角，$\angle B+\angle C$ 也是平角，然后根据公理 3（"等量减等量，其差相等"），所以 $\angle A=\angle B$.

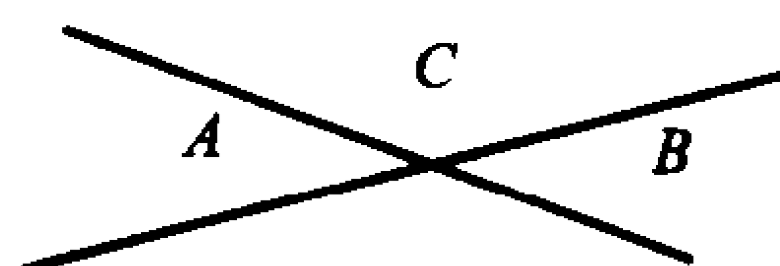


图 6-3

这里，重要的价值不在"对顶角相等"的命题本身，而在于如何确定一个结论的真理性. 几何学是人类不凭直观和实验，运用逻辑证明真理的典范.

中国古代数学没有对顶角相等这样的定理，古希腊为什么会有？这可以从文化层面进行分析. 追求真理是人类永远的目标. 如何判断一个命题是真理，不同的人，在不同的文化影响下，会有不同的答案.

古希腊是奴隶制国家. 当时希腊的雅典城邦实行奴隶主民主政治. 由男性公民组成的民众大会有权制定法律，处理财产、祭祀、军事等问题（注意：广大的奴隶、妇女、外来人不能享受民主权利）. 奴隶主的民主政治和皇帝君王独裁的政治，是有所区别的. 古希腊的奴隶主民主政治，往往需要用理由说服对方，于是学术上的辩论风气较浓. 为了证明自己坚持的是真理，就需要证明. 于是，古希腊的学术，不仅要解决真理"是什么（What）"的问题，还要回答"为什么（Why）"的问题，"唯理论"的学术风气很盛.

中国在春秋战国时期也有百家争鸣的学术风气，但是没有实行古希腊统治者之间的民主政治，而是实行君王统治制度．春秋战国时期的百家争鸣，固然是知识分子自由表达见解的黄金年代．但是，其核心课题是帮助君王统治臣民、管理国家．在这样的环境下，中国的古代数学，多半以“管理数学”的形式出现，目的是为了丈量田亩、兴修水利、分配劳力、计算税收、运输粮食等国家管理的实用目标．理性探讨在这里退居其次．

三、精中求简，保持平面几何的完整体系

中学里平面几何的公理体系，当然不能使用极端严密的希尔伯特公理体系，也不可能使用原始的欧氏几何体系．公理可以多一些，起点高一些．比如，三角形全等的判别法也可以当作公理来陈述．几何学的内容可以适当减少．但是，无论如何，在整体上应该保留一个演绎的系统．学习的过程可以是：直观感知—操作确认—演绎论证—代数计算．结论可以由直观和实验方法进行猜想，但最终必须经过证明，由已知推出未知．推理的严密程度随年龄而增加．证明可以用说理的方法（如使用图形运动变换的语言），也可以用三段论的逻辑方法．这在我国已经进行了多年的实验，可以进一步总结．

四、分清几何的基本要求和较高要求，不搞一刀切

由于时代的进步，实行 5 天工作制，学时数大量减少．同时，未来公民所需要学习的知识却在不断膨胀、甚至爆炸．古希腊把几何学作为高级知识分子学习的内容．今天的几何教育，则是为大众服务的．我们只能在有限的时间内让学生掌握平面几何体系的精髓．因此，在义务教育阶段，21 世纪中学平面几何内容，一定会比 20 世纪的要少些．删节一些内容势在必行．不然的话，“一万年以后怎么办?”．

如上所述，对所有未来公民实行的几何教育，主要是体会、了解理性思维的价值，提高思维水平．但是，平面几何的价值不仅如此．一部分将来从事科学研究的知识分子，管理国家的决策人员，需要从事创造性工作的各行各业的精英，需要学习更多的平面几何知识．他们应该学的更加系统，更加深入，对公理化思想有更深的体会，对于添加辅助线使得难题证明豁然开朗的“美妙体验”，具有真实的感受．因此，不同的人学习不同的几何．在高中数学课程标准里，设置“平面几何”的选修课，是一个不错的选择．

五、近几年来，几何学的考题也有许多新的创造

例如，2002 年的全国高考（文科）试卷的第 22 题，就是一道很好的开放题．

“给出两张相同的正三角形纸片，

1. 其中一张(图 6－4)剪拼成一个正三棱锥；

2. 另一张(图 6－5)剪拼成一个正三棱柱.

使它们的全面积都与原三角形的面积相等.请设计一种剪拼方法，分别用虚线标示在图 6－4，图 6－5 中，并作简要说明.”

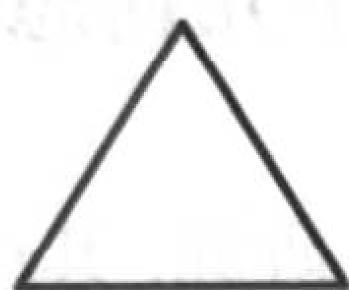


图 6－4

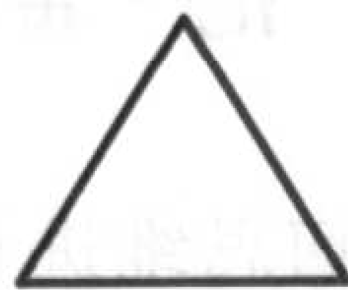
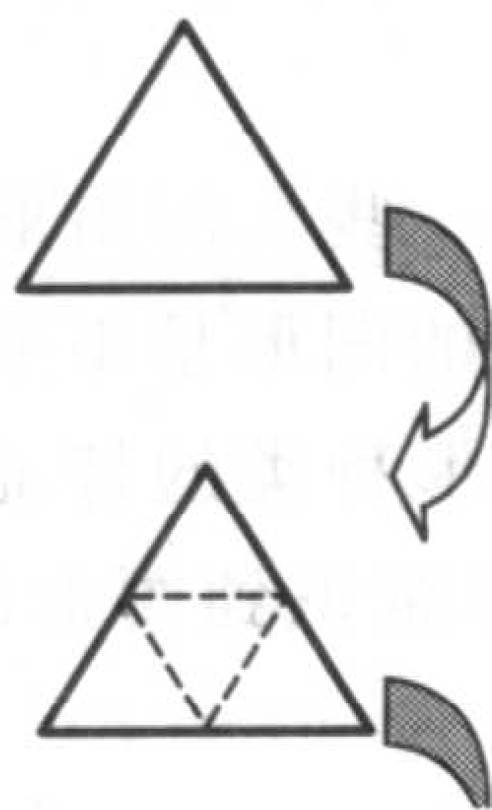


图 6－5

考试中心只给出了一个如下的“标准答案”图 6－6.

然而考生还给出另外的答案如图 6－7.



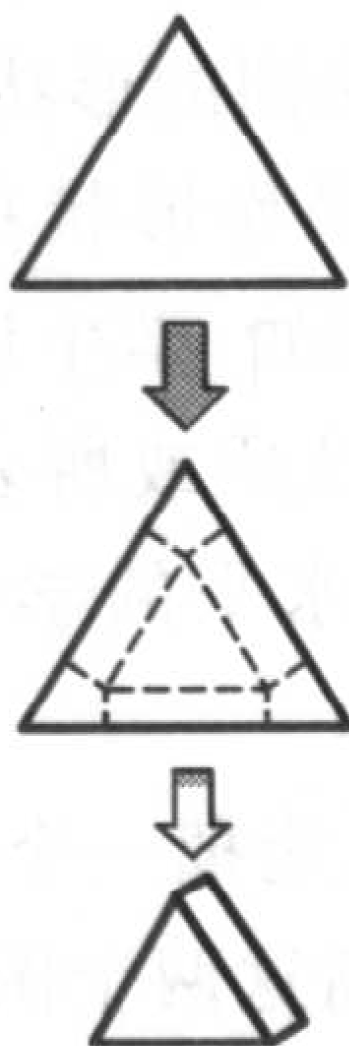
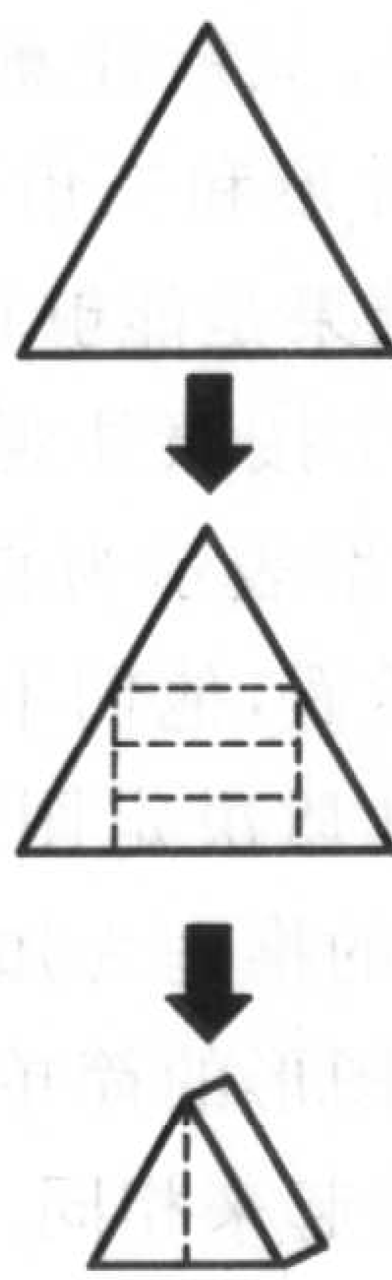


图 6－6



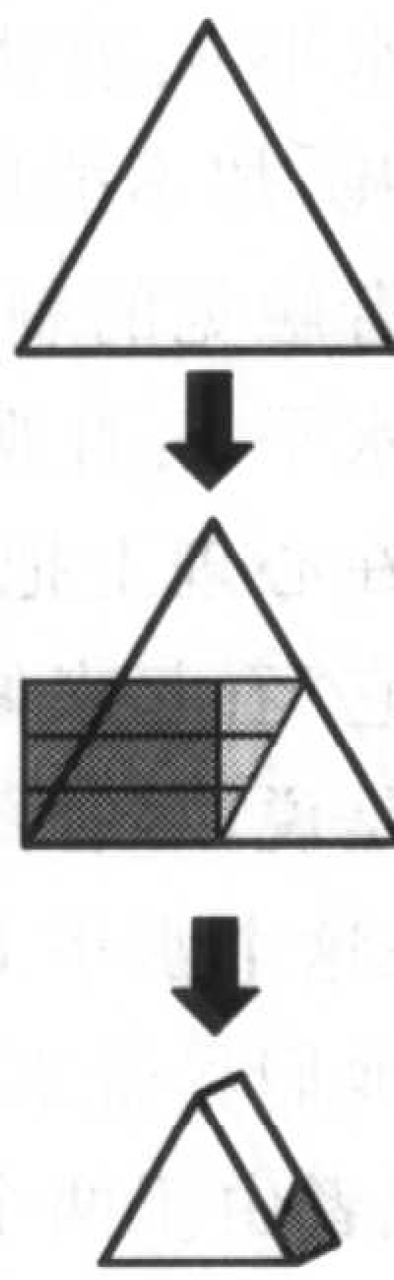


图 6－7

事实上，答案是无穷的(如图 6－7 就是其一).戴再平指出[①]，这道题可以用以下的“波尔约—盖尔文”定理来加以诠释：

如果给出两个面积相等的多边形，总可以首先把其中一个剖分成有限个多边形，然后把这些多边形重新组成另一个多边形.(“组成”的意思是将多边形作平移和旋转).

按照这个定理，上述考题只是一个推论.由于相同面积的图形无限多，所以答案也会是无限多.因此，虽然考试试卷的设计者未曾想到它有无穷多个解答，却“无心插柳”式地成为一道绝好的开放题.

1959 年，商务印书馆出版的《图形的大小相等和组合相等》(布尔强斯基著)

① 戴再平.波尔约—盖尔文定理与 2002 年高考(文)第 22 题.《数学教学》2003 年第二期

中，曾经详细地加以论证．特别地，这一问题可以推广为1900年希尔伯特第三问题：两个等体积的四面体是否能够将一个四面体作剖分之后拼接成另一个四面体？1902年，戴恩(Dehn)给出了否定的答案．

第四节 范·希尔的6个几何思维水平

西方学者对儿童的几何思维进行了许多研究．其中以范·希尔(Pierre van Hiele, Dina van Hiele)夫妇的研究最著称[①]．他们两人提出了几何思维水平的分析．起先是5种水平，后来又改为3种水平．一般认为还是5种水平更细致、更确切．在范·希尔提出水平1—5之后，其他研究者又补充了一个更低的水平：水平0．以下分别做一些介绍．

水平0：前认知水平．只能注意直观形状的某一些特征．例如可以区分正方形和圆，却不能区分正方形和三角形．在这个水平，学生推理的对象是具体的形象或者触觉的刺激，其结果是能够识别一些"相同的形状"．

水平1：直观化．学生按照外观来识别和操作形状和另外一些几何图形．他们能在心理上把这些图形表示为直观图像．例如，学生说所给的图形是矩形，是因为它"看起来像门"．然而，他们不关心几何性质或所表示图形种类的特征化．也就是说，尽管图形的性质决定图形，而这个水平的学生却未意识到图形的性质．在这个水平上，学生的推理为知觉所主宰．

他们尽管不能说出图形的简单性质，却也能把一个图形与另一个图形相区别；或者由于两个图形看起来相同．他们就判断这两个图形全等："看起来就是如此，没有什么原因"．

在直观化水平，学生推理的对象是按直观上"形状相同"来确认图形分类的．例如，陈述"这个图形是菱形"时，这个学生的意思是"这个图形有我已学过的称作'菱形'的形状"．

水平2：描述/分析．到了第2水平，学生通过图形的性质来识别图形并能确定图形的特征．例如．一个学生可能认为菱形是四条边相等的图形；因此，术语"菱形"指的是"他已学过的所谓'菱形'性质"的一个集合．通过观察、测量、画图和建模等手段经验地建立了性质．学生发现某些性质的组合标志着一类图形，而有些图形却不这样；因而播下了几何含意的种子．然而这个水平的学生看不出两类图形之间的关系(例如，一个学生可能会满足于一个图形因为它是正方形所以

---

① 格劳斯．数学的教与学手册．陈昌平等译．上海：上海教育出版社，1999．见该书第498页，505页，530页

不是长方形).

在这个水平,学生推理的对象是图形的分类,用那些与自己相一致的图形性质在思考,这种推理的产物是建立起图形间关系、图形性质的顺序和图形的分类.

水平 3:抽象/关联.在水平 3,学生能形成抽象的定义.区分概念的必要条件和充分条件;能理解几何领域的逻辑论证,有时甚至能提出这样的论证.他们能分层次将图形分类(通过排出图形性质的顺序)并给出判别它们类别的非形式化论证.例如,一个正方形被识别属菱形,因为可以将它考虑为一个“具有某些外部性质的菱形”.利用非形式化推导,他们能发现图形分类的性质.例如,由于任何四边形可被重组成两个三角形,而每一个三角形的内角和是 180 度.他们能推导任何四边形的内角和一定是 360 度.随着学生发现不同形状的性质,他们觉得有组织这些性质的需要.思想的这种逻辑组织是正确推理的首要表现形式.然而,学生仍不理解逻辑推理是建立几何真理的方法.

在这个水平,学生推理的对象是图形分类性质.“整理图形性质,假如图形满足四条边相等的四边形将知道这个图形是菱形.”这种推理的产物是通过图形性质的交互联系,获得的思想进行了重组.

水平 4:形式推理.达到水平 4 时,学生在公理化系统中建立定理.他们识别未定义术语、定义、公理和定理之间的差异.他们能构造原始的证明;也就是说,他们可以作出系列陈述,对作为“已知条件”的结果的一个结论作逻辑判断.在这个水平,通过逻辑解释像公理、定义和定理的几何陈述.学生能进行形式推理.推理的对象是图形分类性质的关系,推理的产物是建立亚序关系—关系之间的关系——并在一个几何系统中用逻辑链来表述.

水平 5:严密性/元数学.在第 5 水平,学生在数学系统中进行形式推理.即便没有参照模型,他们也能研究几何,而且还能通过形式化地操作如公理、定义、定理等几何陈述进行推理.推理的对象是形式化构造间的关系.他们推理的产物是几何公理系统的建立,及其详尽阐述与比较.

范・希尔水平准确地描述了学生的几何思维吗?一般而言,来自美国和国外的经验研究已证实范・希尔水平在描述学生从小学到中学的几何概念发展方面是有用的.例如,尤西斯金发现大约 75%的中学生适用于范・希尔模式.苏联的一项研究表明,高中毕业时,几乎 40%的学生仍然停留在水平 2.

中国还没有类似的报告.

第五节　变换几何与几何教学改革

1872 年,大数学家 F・克莱因(Felix. Klein,1849—1925)在爱尔兰根大学就

任教授.他的就职演说题为“对于近代几何学研究的考察”.其中给出了几何学的一种定义:“给出一个流形和作用于这个流形的一个变换群,建立关于这个变换群的不变性理论.”根据这一理论,把当时互不相干的几何学统一起来,并依此加以分类.这一划时代的演说,世称“爱尔兰根纲领”.

时至今日,寻求不变量的思想,已经渗入到几乎整个的数学.从研究射影不变量,到拓扑不变量,相对论中的罗仑兹不变量,纤维丛中的陈省身不变量(陈类),都是影响数学全局的大事.

F·克莱因在20世纪初关注中学数学改革,担任了第一届“数学教育委员会(ICMI)”的主席.他的几何变换思想也逐渐渗透到中学数学.在20世纪的数学教育改革历程中,几何学课程受到变换几何思想越来越大的影响.

变换几何有什么值得肯定的地方呢?

1. 变换使得几何学由静态转向动态.几何学不再仅仅是对静止图形的观察、思考和论证.变换几何的对象可以操作,例如轴对称和折纸等;

2. 变换是学生认识图形的工具.通过轴对称、旋转对称、中心对称,以及相似、位似等变换,可以对矩形、正三角形、等腰三角形、平行四边形、菱形等常见图形有更深刻的认识;

3. 变换可以作为论证的一种手段.三角形的全等,是用合同变换来实现的.尺规作图,是将已知的线段和角度,进行移动.在论证上也带来很多方便.例如等腰三角形的性质,用对称很容易说明.再如,圆外一点向定圆作两条切线,彼此一定相等.这是可以用圆的对称性加以说明的.

由于以上的优点,中学数学里逐渐增加了变换的内容.目前主要包括以下部分:

1. 轴对称图形;
2. 平移与旋转;
3. 相似变换;
4. 拓扑变换(七桥问题,多面体定理).

但是,将几何变换纳入中学课程,仍有不少问题需要克服.主要是变换观点和传统欧氏演绎几何还没有十分密切的衔接,有时变成两张皮,徒然增加学习者的负担.此外,几何变换的论证语言还没有规范,在论证一个命题时,叙述的随意性较大.最后,缺乏足够数量的例题和练习题,也是制约变换几何的一个困难.

在此,我们愿意对不变量问题做一些人文的思考.

中学几何课程里有“对称”,中学语文中则有“对仗”.对称是一种变换,变过去的图形有些性质保持不变.轴对称,即依对称轴对折,图形的形状和大小都保持不变.那么对仗是什么? 无非是上联变成下联,但是字词句的某些特性不变.

王维诗云："明月松间照，清泉石上流"．这里，明月对清泉，都是自然景物，没有变．形容词"明"对"清"，名词"月"对"泉"，词性不变．其余各词均如此．数学和文学，许多思考方法往往是相通的．

寻求变化中的不变性质，是人类的共同追求．我国社会在进步，但是优秀的民族传统不变．物体在运动，位置发生改变，但是，它的动量守恒，能量守恒．发生化学变化，但是变化之后的分子量必须守恒．因此，在文化中、文学中、数学中，都广泛存在着"在变化中寻求不变"的共同目标．

对于中学里的变换观念，许多人还不很熟悉，我们用附录一，叙述中学里使用的几何变换思想，并用来求解一些几何问题．

由于矩阵语言已经成为普遍的数学工具，矩阵进入中学数学已经是不可避免的事．美国 NCTM 高中课程标准中就有"矩阵与几何变换"的专章．我国于 2003 年颁布的《高中数学课程（实验稿）》将矩阵和线性变换列为选修课．由于我国自 20 世纪 80 年代以来，大学基础课中讲授完整的线性代数，因此，教师对此不会陌生．为了系统地阐述中学几何课与矩阵内容的联系，我们把它作为附录二．

附录一　中学里的几何变换

中学平面几何涉及的几何变换主要有合同（包括平移、旋转、轴反射）、相似（包括位似）、仿射和反演等四种变换．以下我们分别加以叙述．

在平面到自身的一一变换下，如果任意线段的长和它的像的长总相等，那么这种变换叫做合同变换．合同变换具有下述基本性质：

性质 1　在合同变换下，直线变为直线，线段变为线段，射线变为射线；两直线的平行性、垂直性、所成的角度都不变；共线点变为共线点，且保持顺序关系不变；直线上 A,B,C 三点的简比 $\frac{AC}{BC}$ 不变．

性质 2　在合同变换下，三角形、多边形和圆的像分别变为与它们全等的三角形、多边形和圆；封闭图形的面积不变．

在平面到自身的一一变换下，若任意一对对应点 A,A' 连结的有向线段等于定向量 $\vec{a}$，则这种变换叫做平移，记为 $T(\vec{a})$．$\vec{a}$ 叫平移向量，$\vec{a}$ 的方向叫做平移方向，其长度叫平移距离．

在平面到自身的一一变换下，若每对对应点 A,A' 所连结的线段，都被定直线 l 所垂直平分，则这种变换叫做关于直线 l 的轴对称或轴反射，记为 $S(l)$．直线 l 叫做对称轴或反射轴，点 A' 叫做点 A 关于轴 l 的对称点．

在平面到自身的一一变换下，若任意一对对应点 A,A' 与平面上一定点 O

的距离总相等，且$\angle AOA'$等于定角θ，这种变换叫做关于点O的旋转，记为$R(O,\theta)$. 点O叫做旋转中心，θ叫做旋转角.

特别地，旋转角$\theta=180^\circ$的旋转变换称为中心对称变换或点反射，记为$C(O)=R(O,180^\circ)$.

性质 3 在平移变换下，直线（线段）变成与它平行（或重合）的直线（线段）；在轴对称变换下，P为对称轴l上任一点，则一双对应点所成的角$\angle APA'$被l所平分；在旋转变换下，对应直线的交角总等于旋转角；在中心对称变换下，对应点连线段过对称中心且被它平分，对应线段相等且反向平行或共线，不过对称中心的直线与其对应的直线平行.

在平面到自身的一一变换下，若线段$A'B'$是AB的像，且$A'B':AB=k$（k为正的常数），则这种变换叫做相似变换，记为$H(k)$. 常数k叫做相似系数或相似比. 特别地，若$k=1$，则为合同变换；$k=-1$，则为中心对称变换.

性质 4 在相似变换下，直线变为直线，线段变为线段，射线变为射线；点与直线的结合关系不变，点在直线上的顺序关系不变；直线上三点的简比不变，两直线的夹角不变，两相似多边形面积比不变且等于相似比的平方.

在平面到自身的一一变换下，若对于任一对对应点A，A'与平面上一定点O，都有$OA':OA=k$（k为非零常数），则这种变换叫做位似变换，记为$H(O,k)$. O叫做位似中心，k叫做位似比.

特别地，当$k>0$时，A，A'在点O同侧，这种变换叫顺（或正或外）位似；$k<0$时，A，A'在点O两侧，这种变换叫逆（或反或内）位似.

性质 5 在位似变换下，对应线段之比相等，对应角相等且转向相同；不过位似中心的对应直线平行.

在平面到自身的一一变换下，若对于任一对对应点A，A'与平面上一定点O，都有$OA':OA=k$（k为正的常数），且$\angle AOA'=\theta$（θ为有向的定角），则这种变换叫做位似旋转变换，记为$S(O,\theta,k)$. 点O叫做位似中心，k叫做位似比，θ叫做旋转角，

且
$$S(O,\theta,k)=H(O,k)\cdot R(O,\theta)=R(O,\theta)\cdot H(O,k);$$
$$S(O,0,k)=H(O,k);S(O,\pi,k)=H(O,-k);S(O,\theta,1)=R(O,\theta).$$

性质 6 在位似旋转变换下，把两个相似形中的一个变到另一个；具有共同中心的两个位似旋转变换之积仍是一位似旋转，即有
$$S(O,\theta_1,k_1)\cdot S(O,\theta_2,k_2)=S(O,\theta_1+\theta_2,k_1\cdot k_2).$$

在平面到自身的一一变换下，若满足任意共线三点的对应点仍共线，且其三点的简比保持不变，则称此变换为仿射变换.

显然，若建立平面坐标系，仿射坐标系与直角坐标系的差别就在于两轴间的

夹角及轴上单位长度不相同. 若两轴夹角仍为 90°，则称为伸缩变换：$(x,y)\to(k_1x,k_2y)$，其中 $k_1>0,k_2>0$.

性质 7　在仿射变换下，点变成点，直线变成直线；保持点和直线的结合关系；保持直线的平行关系；保持两平行(共线)线段的长度比；任一封闭凸曲线所围成的图形的面积 S 和它对应图形所围成的面积 S' 之比为常数.

性质 8　在仿射变换下，任一三角形可变成正三角形；梯形可变成等腰梯形；任一平行四边形可变成正方形；任一椭圆可变成圆，相应地椭圆中心变成圆心，椭圆直径变成圆的直径，椭圆的切线变成圆的切线.

设 O 是平面上一定点. 对于一个变换，若任一对对应点 A,A'(异于 O)，都有 $\overrightarrow{OA'}\cdot\overrightarrow{OA}=k$($k$ 为非零常数)，则称此变换为反演变换，记为 $I(O,k)$. O 点称为反演中心，k 为反演幂.

显然，$k<0$ 时，A,A' 在点 O 两侧，可经以 O 为中心对称变换变成 $k>0$ 的情形. 故只考虑 $k>0$ 的情形，且令 $k=r^2$. 此时，反演变换的几何意义为，满足"以 O 为圆心，r 为半径的圆中直角三角形的射影定理形式：$r^2=OP^2=OA\cdot OA'$"的图形. 并称这个圆为反演变换的基圆.

性质 9　在反演变换下，基圆上的点仍变为自己；基圆内的点(除中心外)变为基圆外的点，反之亦然.

性质 10　在反演变换下过反演中心的直线是不变直线(除中心)；过反演中心的圆变为不过反演中心的直线；过反演中心的相切两圆(或一圆一直线)变为不过反演中心的两平行直线；过反演中心的两相交圆变为不过反演中心的相交直线；反之亦然.

性质 11　在反演变换下，不过反演中心的圆变为不过反演中心的圆；以反演中心为圆心的圆变为同心圆；不过反演中心相切(交)的圆变为不过反演中心的相切(交)的圆；不共线的任意两对对应点必共圆；圆和圆、圆和直线、直线和直线的交角保持不变.

下面，我们看一些例子.

例 1　如图 6-8，设 A',B',C' 分别是 $\triangle ABC$ 的边 BC,CA,AB 的中点，O_1,O_2,O_3,I_1,I_2,I_3 分别是 $\triangle AB'C',\triangle A'BC',\triangle A'B'C$ 的外心和内心. 求证：$\triangle O_1O_2O_3\cong\triangle I_1I_2I_3$.

证明　由三角形中位线性质知，$\overrightarrow{C'B}=\overrightarrow{B'A'}=\overrightarrow{AC'}$，故

$$\triangle AB'C'\xrightarrow{T(\overrightarrow{AC'})}\triangle C'A'B.$$

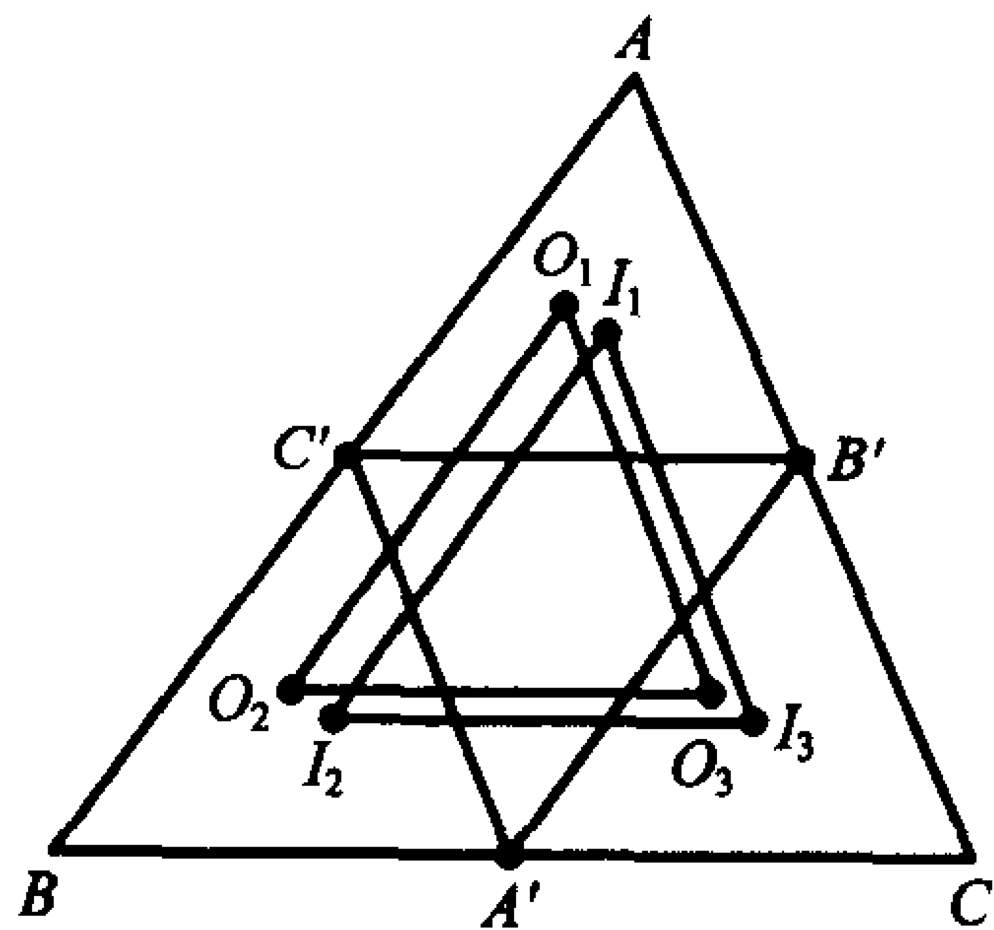


图 6-8

于是 $O_1 \xrightarrow{T(\overrightarrow{AC'})} O_2$，$I_1 \xrightarrow{T(\overrightarrow{AC'})} I_2$. 所以$\overrightarrow{O_1O_2}=\overrightarrow{AC'}=\overrightarrow{I_1I_2}$.

同理，$\overrightarrow{O_1O_3}=\overrightarrow{I_1I_3}$，$\overrightarrow{O_2O_3}=\overrightarrow{I_2I_3}$.

故 $\triangle O_1O_2O_3 \cong \triangle I_1I_2I_3$.

例 2 设$\triangle DPQ$是锐角$\triangle ABC$的垂足三角形(即 D,P,Q 分别为三条高线的垂足). 求证：$\triangle DPQ$是$\triangle ABC$中周长最短的内接三角形.

证明 由题设，如图 6-9，AD,BP,CQ 分别是$\triangle DPQ$的内角平分线. 令$\triangle DEF$是$\triangle ABC$中以 D 为一顶点的任一内接三角形，且 $D \xrightarrow{S(AB)} D'$，$D \xrightarrow{S(AC)} D''$，则 $D'D''$落在直线 PQ 上，且 $D'Q=DQ$，$D''P=DP$，线段 $D'D''$之长等于$\triangle DPQ$之周长.

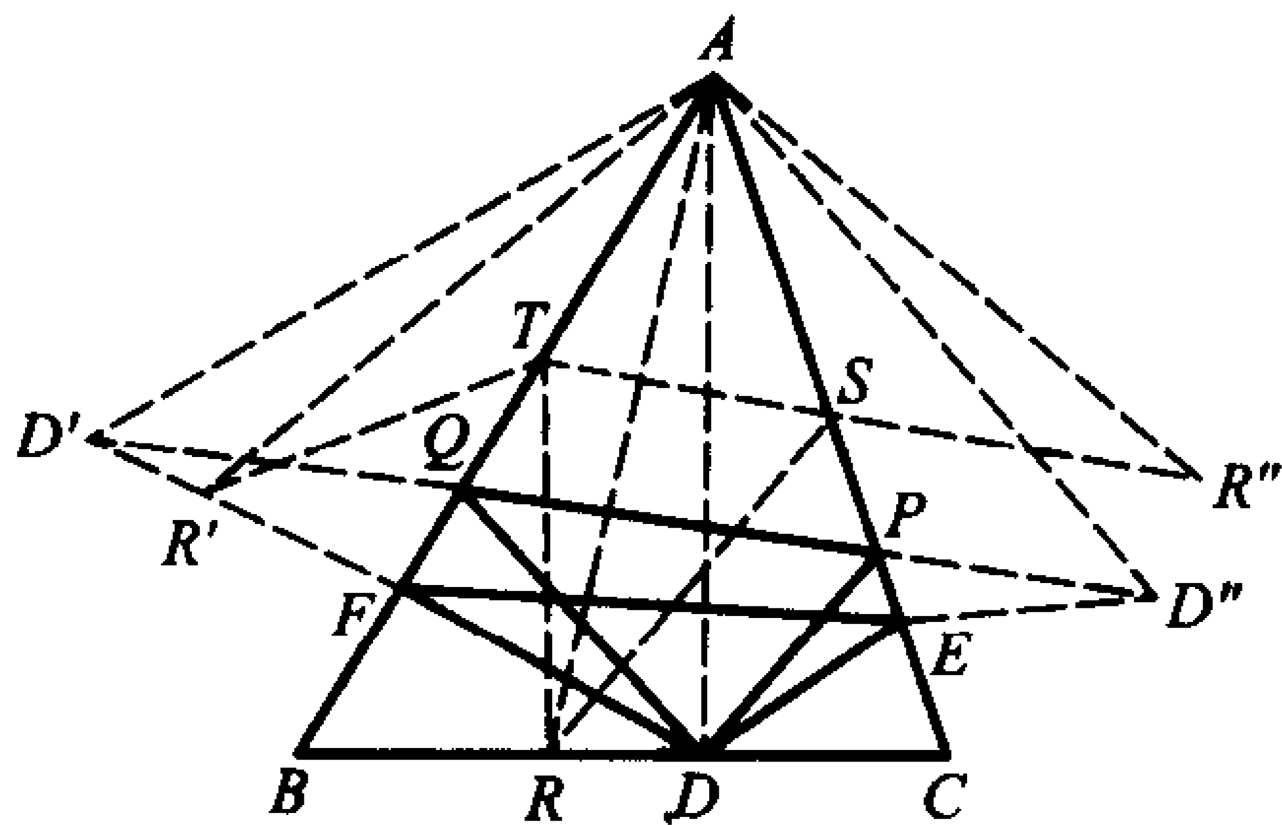


图 6-9

连结 $D'F$，$D''E$，则折线 $D''EFD'$之长等于$\triangle DEF$之周长，显然 $D'D''\leqslant D''E+EF+FD'$. 不难计算 $D'D''=\sqrt{2AD^2-2AD^2\cdot\cos 2\angle A}=2AD\cdot\sin\angle BAC$.

若$\triangle RST$是$\triangle ABC$的任一内接三角形，则用类似方法可以证得$\triangle RST$的周长大于或等于 $2AR\cdot\sin\angle BAC$. 由于 $AR\geqslant AD$，从而$\triangle RST$的周长$\geqslant\triangle DPQ$的周长，即垂足三角形$\triangle DPQ$的周长最短.

例 3 在$\triangle ABC$内有一点 P，满足$\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=120°$. 求证：$P$ 是到三顶点距离之和最小的点(即费马点).

证明 由$\angle CPA=\angle BPC=120°$，故对$\triangle APC$施行旋转变换 $R(C,-60°)$，则$\triangle APC \xrightarrow{R(C,-60°)} \triangle EP'C$.

由于$\angle P'PC=\angle PP'C=60°$，则 B,P,P',E 共线，且

$$BE=BP+PP'+P'E=BP+CP+AP.$$

对于$\triangle ABC$内任一点 Q，令$\triangle AQC \xrightarrow{R(C,-60°)} \triangle EQ'C$，则 $QQ'=QC$，$Q'E=QA$，于是 $QA+QB+QC=Q'E+QB+QQ'\geqslant BE=BP+CP+AP$. 故 P 点是到三顶点距离之和最小的点.

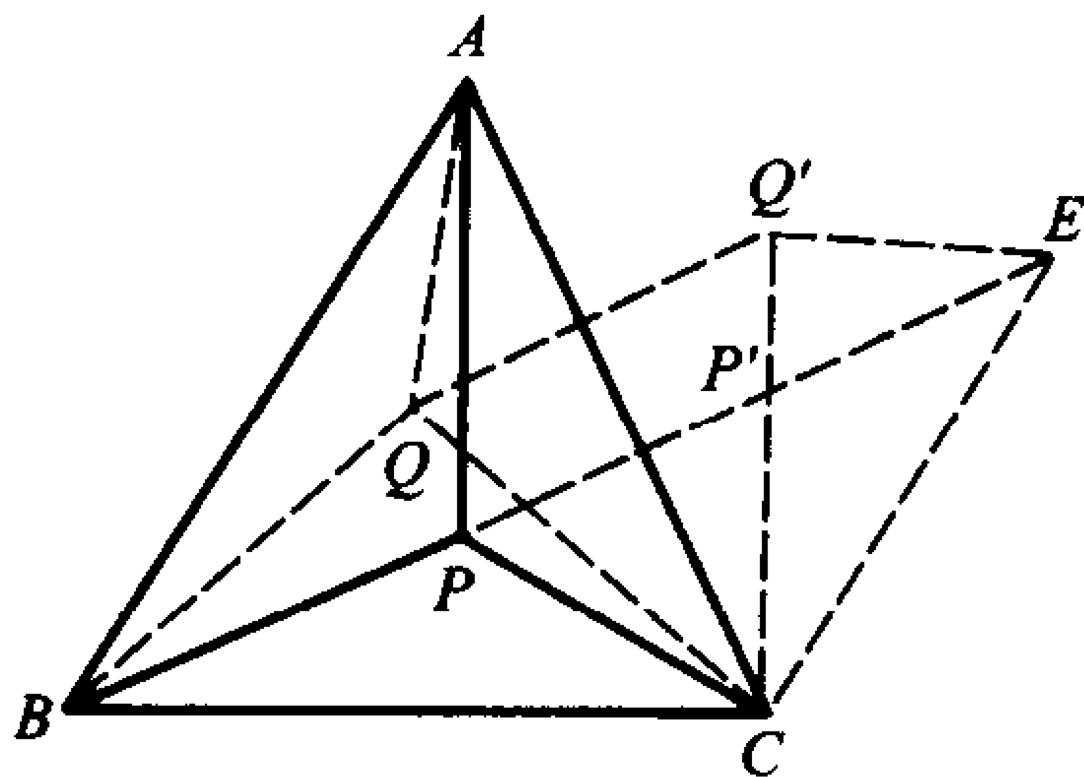


图 6-10

例 4 如图 6-11，在$\triangle ABC$中，$AB>AC$，$\angle A$ 的一个外角的平分线交$\triangle ABC$的外接圆于点 E，过 E 作 $EF\perp AB$，垂足为 F. 求证：$2AF=AB-AC$.

证明　由题设知$\angle AEF=90^\circ-\angle BAE=\frac{1}{2}\angle BAC$.

作 A 关于 F 的对称点 D，则$\angle AED=\angle CAB$，且 $EA=ED$. 连结 BE，CE.

又$\overset{\frown}{EB}=\overset{\frown}{EC}$(由$\angle EBC=\angle EAT=\angle EAB$)，则 $EB=EC$，且$\angle CEB=\angle CAB=\angle AED$，所以可将$\triangle AEC$ 绕 E 点旋转$\angle AED$ 到$\triangle DEB$ 处，从而 $AC=DB$. 故 $AB-AC=AD=2AF$.

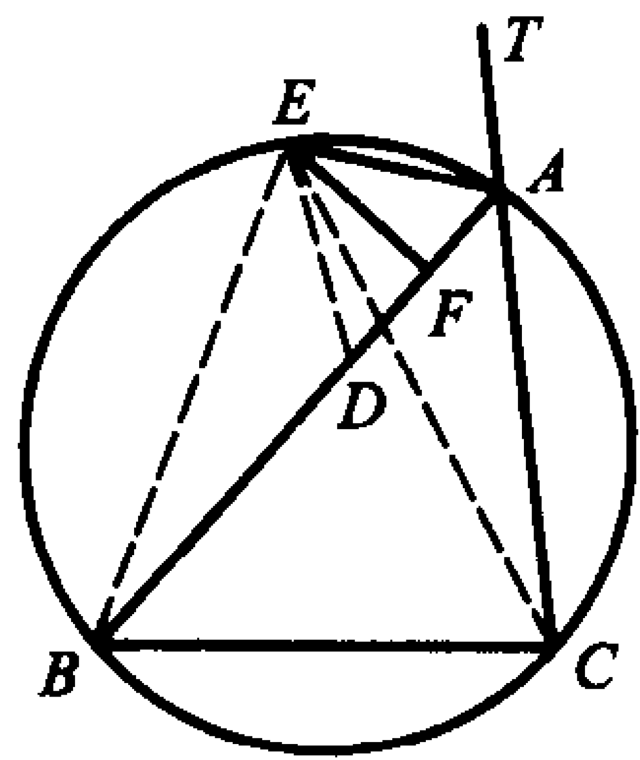


图 6 - 11

例 5　如图 6 - 12，$\triangle ABC$ 和$\triangle ADE$ 是两个不全等的等腰直角三角形，现固定$\triangle ABC$，而将$\triangle ADE$ 绕 A 点在平面上旋转. 试证：不论$\triangle ADE$ 旋转到什么位置，线段 EC 上必有点 M 使$\triangle BMD$ 为等腰直角三角形.（参见第五章第三节中例 5）

证法 1　先令$\triangle BMD$ 为等腰直角三角形，再证 M 在 EC 上.

作 A 关于 BD 的对称点 A'，则$\angle A'DB=\angle ADB$. 由$\angle ADE=90^\circ=2\angle BDM$，有$\angle EDM=\angle A'DM=|45^\circ-\angle A'DB|=|90^\circ-45^\circ-\angle ADB|$.

而 $DA'=DA=DE$，则 A'是 E 关于 DM 的对称点.

同理，A'也是 C 关于 BM 的对称点.

从而$\angle EMD=\angle A'MD$，$\angle CMB=\angle A'MB$，而$\angle BMD=90^\circ$，故$\angle CME=180^\circ$，即 M 在 BC 上.

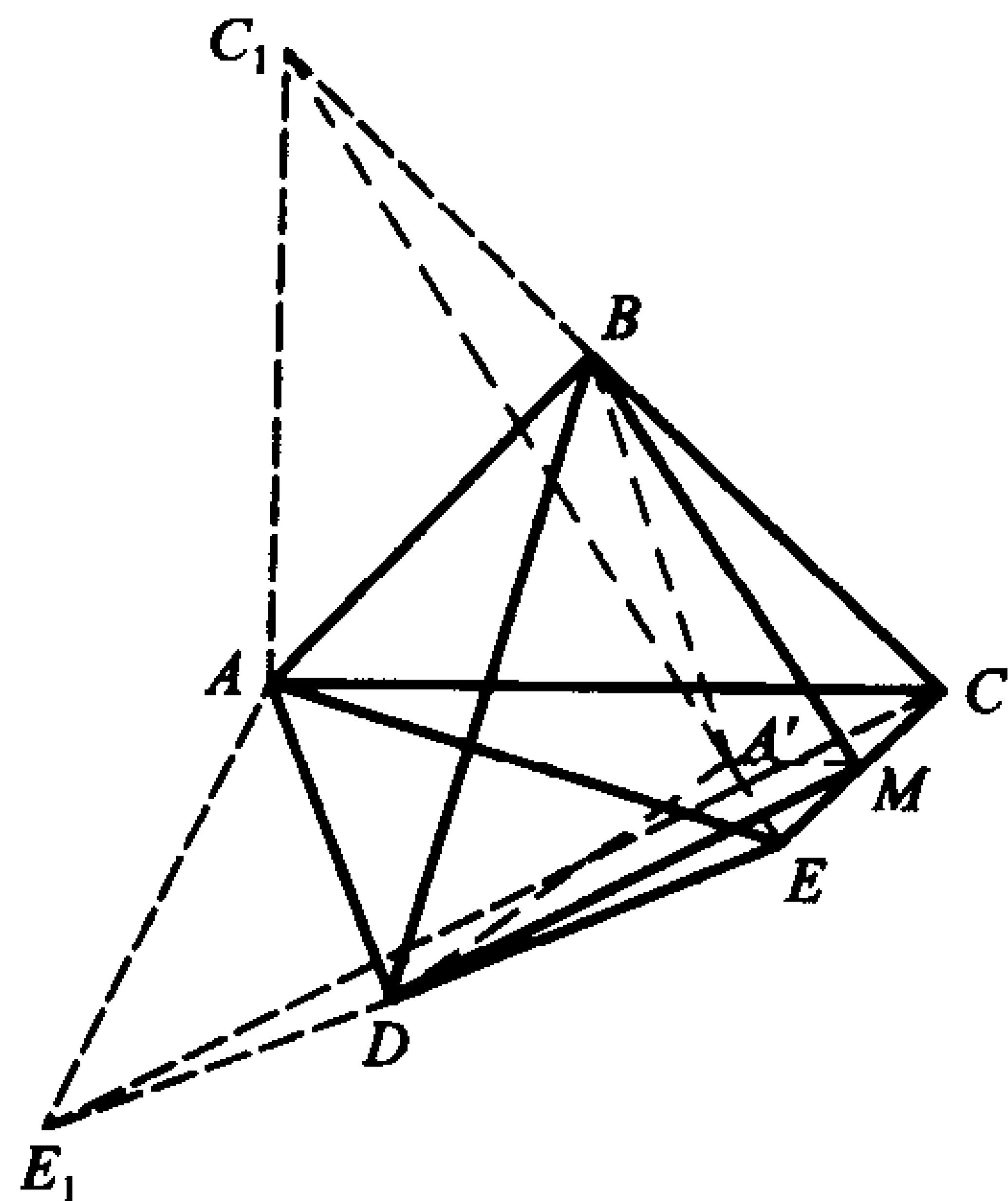


图 6 - 12

证法 2　先取 EC 中点 M，再证$\triangle BMD$ 为等腰直角三角形. 作 AC 关于 AB 的对称线段 AC_1，连结 BC_1，EC_1，将$\triangle AC_1E$ 绕 A 点顺时针方向旋转 90°到$\triangle ACE_1$ 的位置如图 16 - 12，则 $C_1E\perp CE_1$，$\triangle AC_1E\cong\triangle ACE_1$，且$\angle C_1AC=\angle EAE_1=90^\circ$，从而由 $AE=AE_1$，有$\angle ADE=\angle ADE_1$，即知 E，D，E_1 三点共线且 D 为 EE_1 中点.

再由 $BM \mathrel{\underline{\mathrel{/\!/}}} \frac{1}{2}C_1E$，$DM \mathrel{\underline{\mathrel{/\!/}}} \frac{1}{2}CE_1$ 及 $C_1E\perp CE_1$ 且 $C_1E=CE_1$ 即证.

例 6　如图 6 - 13，在锐角$\triangle ABC$ 的 BC 边上有两点 E，F，满足$\angle BAE=\angle CAF$，作 $FM\perp AB$ 于 M，作 $FN\perp AC$ 于 N，延长 AE 交$\triangle ABC$ 的外接圆于 D.

证明：四边形 $AMDN$ 与$\triangle ABC$ 的面积相等.

证明　作 $DK\perp AB$ 于 K，作 $DL\perp AC$ 于 L，则只要证明

$$S_{\triangle FBM}+S_{\triangle FCN}=S_{\triangle FDM}+S_{\triangle FDN}.$$

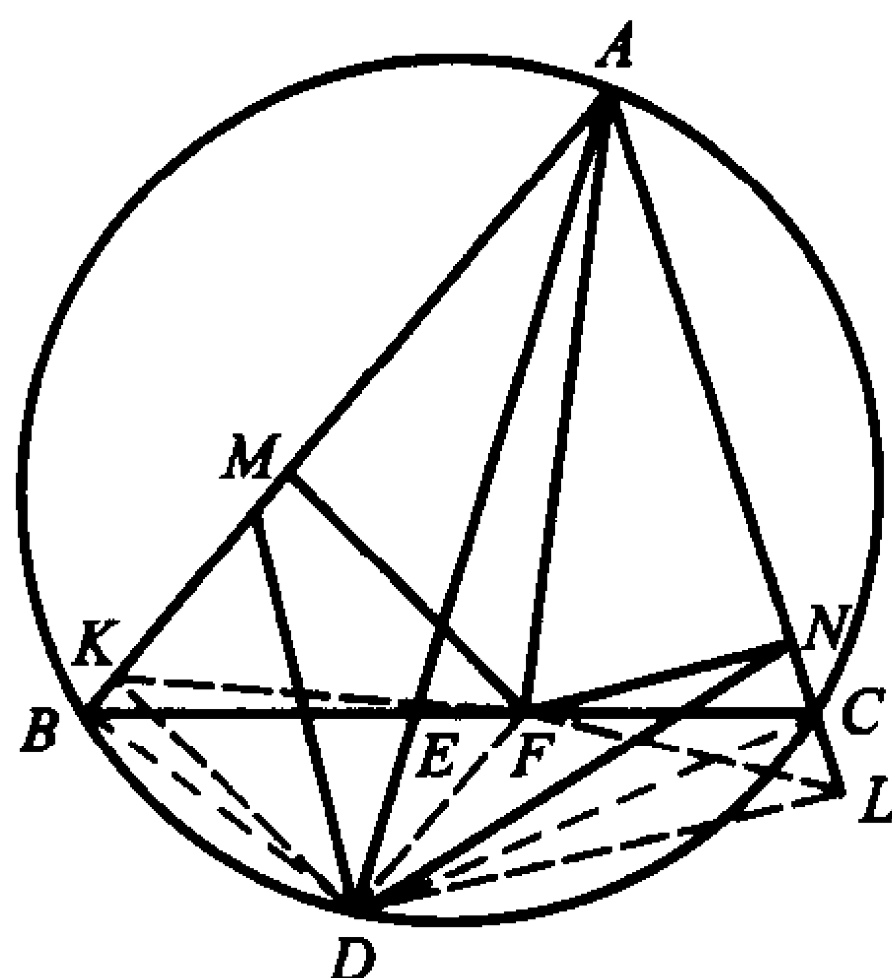


图 6-13

利用 $S_{\triangle FDM}=S_{\triangle FKM}$，$S_{\triangle FDN}=S_{\triangle FLN}$，只需证明 $S_{\triangle FBM}+S_{\triangle FCN}=S_{\triangle FKM}+S_{\triangle FLN}$，即 $FM\cdot BM+FN\cdot CN=FM\cdot MK+FN\cdot NL$. 因此，只需证明 $FM(BM-MK)=FN(NL-CN)$，连结 BD，DC，则知 $\angle KBD=\angle ABD=\angle DCL$. 从而 Rt$\triangle BKD$ 可相似旋转变换为 Rt$\triangle CLD$，即 $FM\cdot BK=FN\cdot CL$.

设 $\angle BAE=\angle CAF=\alpha$，

有
$$\frac{BK}{CL}=\frac{DK}{DL}=\frac{\sin\alpha}{\sin(A-\alpha)}=\frac{FN}{FM}.$$

故结论成立.

例 7 如图 6-14. $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 外切于点 A，半径分别为 r_1 和 r_2，PB，PC 分别为 $\odot O_1$，$\odot O_2$ 的切线，B，C 为切点，且 $PB:PC=r_1:r_2$，又 PA 交 $\odot O_2$ 于 E 点. 求证：$\triangle PAB\backsim\triangle PEC$.

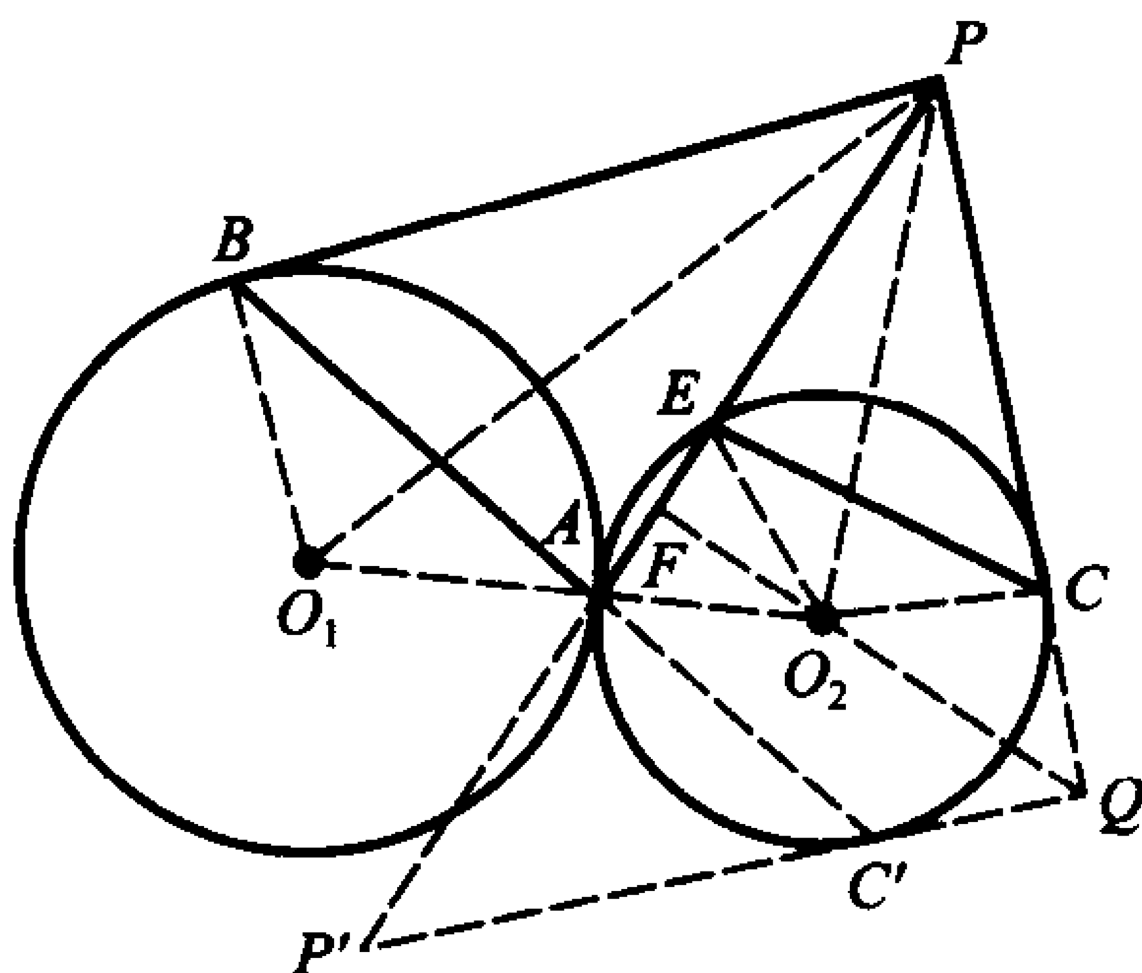


图 6-14

证法 1（相似证法） 连结 BO_1，PO_1，PO_2，EO_2，CO_2，注意到 O_1，A，O_2 三点共线，由 $PB:PC=r_1:r_2$，有 Rt$\triangle PBO_1\backsim$ Rt$\triangle PCO_2$，从而 $PO_1:PO_2=O_1A:O_2A$，由角平分线性质定理的逆定理知 $\angle APO_1=\angle O_2PA$.

又 $\angle O_2AP=\angle O_2EA$，有 $\angle O_1AP=\angle O_2EP$，从而 $\triangle O_1AP\backsim\triangle O_2EP$，则 $PA:PE=r_1:r_2$，即 $PA:PE=PB:PC$.

而 $\angle BPA=\angle CPE$，故 $\triangle PAB\backsim\triangle PEC$.

证法 2（位似证法） 考虑以 A 为位似中心的变换，把 $\odot O_1$ 变到 $\odot O_2$，$\triangle PAB$ 变到 $\triangle P'AC'$，则 $P'C'$ 切 $\odot O_2$ 于 C'. 由 $PB:P'C'=r_1:r_2=PB:PC$ 知 $P'C'=PC$.

延长 $P'C'$ 与 PC 的延长线相交于点 Q，如图 6-14. 由 $QC'=QC$，知 $\triangle PQP'$ 为等腰三角形.

连结 QO_2 并延长交 AE 于 F，则 $QF\perp AE$，故 QF 平分 AE，则 $AP'=PE$. 由此知 $\triangle PEC\cong\triangle P'AC\backsim\triangle PAB$.

例 8 如图 6-15，设 H 为 $\triangle ABC$ 的垂心，L，M，N 分别是 BC，CA，AB 边的中点. D，E，F 分别是三条高的垂足，P，Q，R 分别是 HA，HB，HC 的中点. 试

证:L,M,N,D,E,F,P,Q,R 九点共圆(九点圆定理)

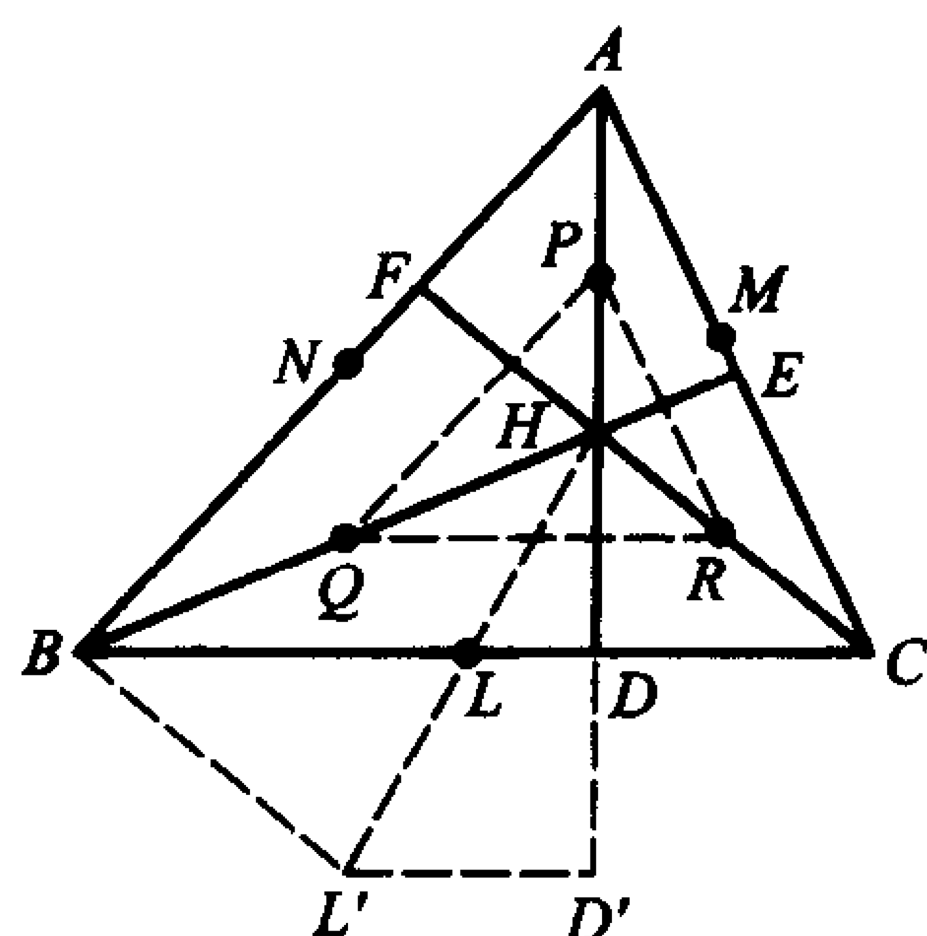


图 6-15

证明　由于 P,Q,R 分别是 HA,HB,HC 的中点,故以 H 为位似中心,位似比为 2 的位似变换把$\odot PQR$ 变成$\odot ABC$. 因此,要证 L,M,N,D,E,F 在$\odot PQR$ 上,只要证明这些点在上述位似变换下的像点均在$\odot ABC$ 上即可.

作 $H\xrightarrow{C(D)}D'$, $H\xrightarrow{C(L)}L'$,则 D',L' 在$\odot ABC$ 上. 同理 E,M,F,N 的像点也在$\odot ABC$ 上,再由上述位似变换之逆即证得结论成立.

例 9　如图 6-16,$AB\,/\!/\,CD_2$, $AC\,/\!/\,BD_1$, A 在 D_1D_2 上. 求证:$S^2_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD_1}\cdot S_{\triangle ACD_2}$.

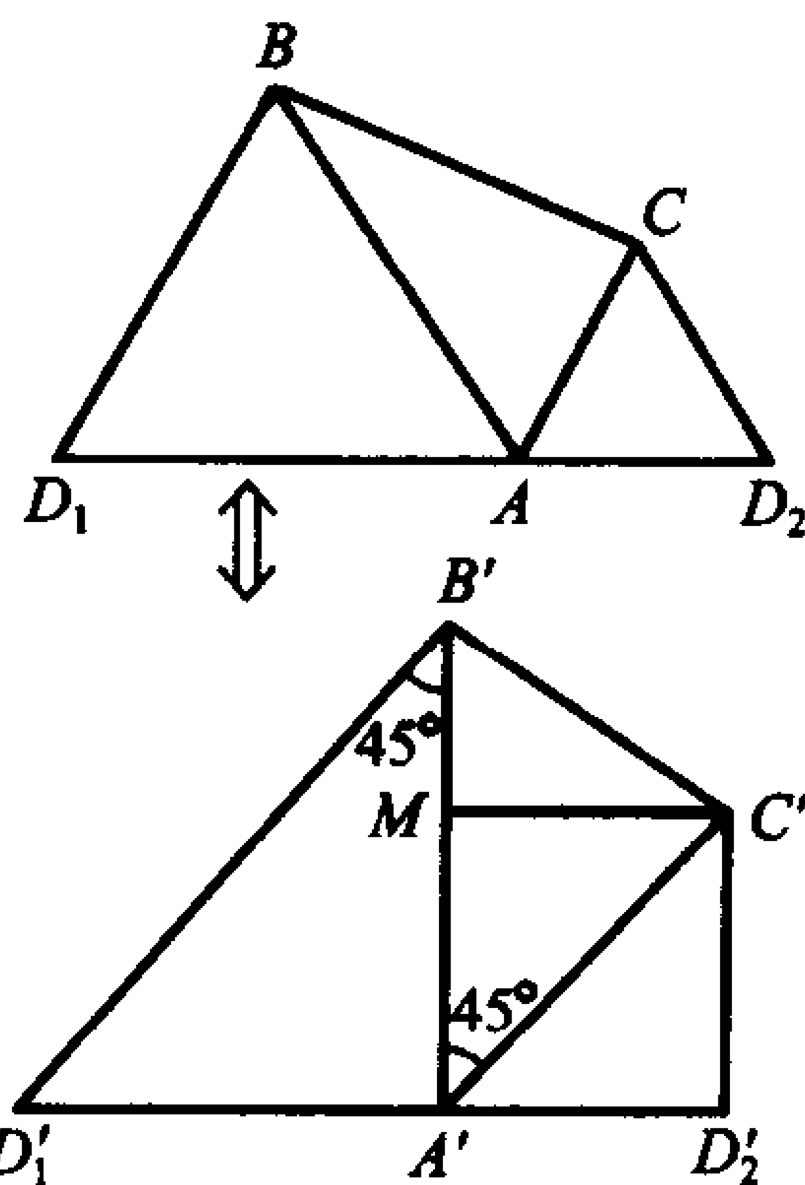


图 6-16

证明　因为梯形是仿射不变形,所以题设中的两个梯形可由两个特殊梯形经仿射变换后得到. 设梯形 $C'B'A'D'_2$和梯形 $C'B'D'_1A'$ 皆为直角梯形,且 $C'D'_2=D'_2A'=MB'=1$. 梯形 $A'D'_2C'B'\xrightarrow{\text{仿射}}$梯形 AD_2CB, 梯形 $A'C'B'D'_1\xrightarrow{\text{仿射}}$梯形 $ACBD_1$,则 $S_{\triangle A'B'C'}=\frac{1}{2}A'B'\cdot MC'=1$, $S_{\triangle A'B'D'_1}=\frac{1}{2}A'B'\cdot A'D'_1=2$, $S_{\triangle A'C'D'_2}=\frac{1}{2}$. 从而 $S^2_{\triangle A'B'C'}=S_{\triangle A'B'D'_1}\cdot S_{\triangle A'C'D'_2}$. 故 $S^2_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABD_1}\cdot S_{\triangle ACD_2}$.

例 10　在凸四边形 $ABCD$ 的边 AB 和 BC 上取点 E 和 F,使线段 DE 和 DF 把 AC 三等分,已知$\triangle ADE$ 和$\triangle CDF$ 的面积等于四边形面积的$\frac{1}{4}$. 求证:$ABCD$ 是平行四边形.

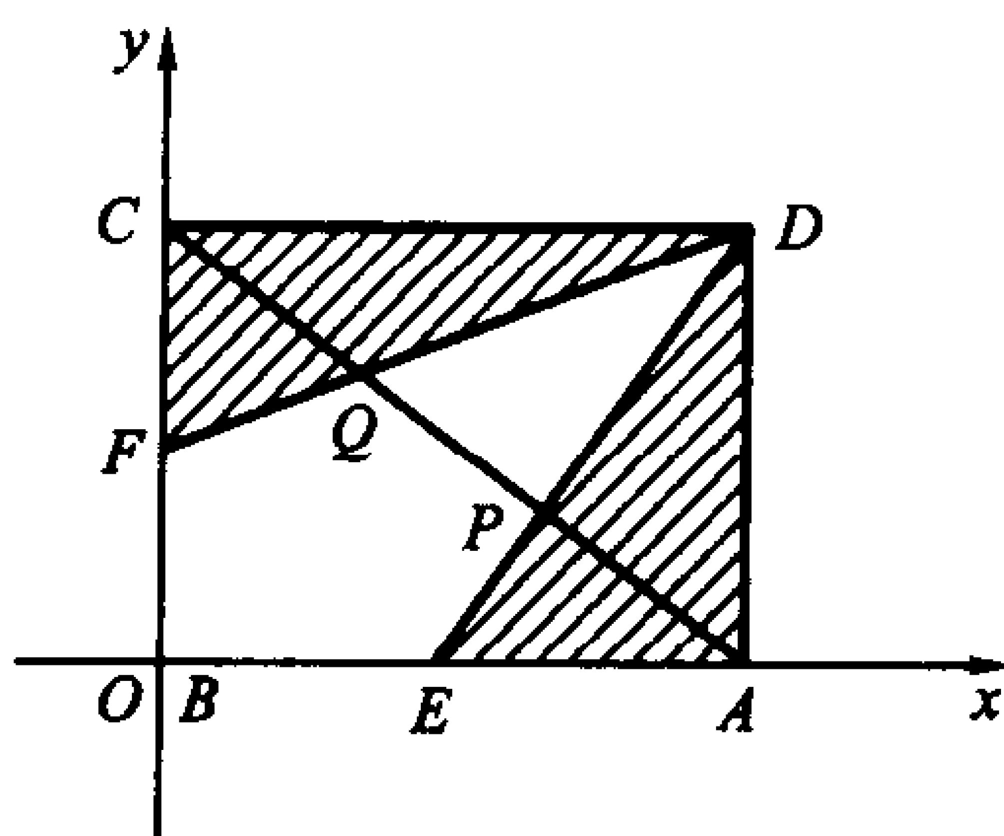


图 6-17

证明　题中条件与结论均满足仿射变换不变性特性. 将$\triangle ABC$ 变换成图 6-17 所示直角三角形,设$|AB|=3$, $|BC|=3$,则 $A(3,0)$, $C(0,3)$, $P(2,1)$, $Q(1,2)$.

设 $D(a,b)$为所求,则直线 DE 的方程为

$$y-1=\frac{b-1}{a-2}(x-2).\text{ 令 }y=0\text{ 得 }x_E=\frac{2-a}{b-1}+2.$$

于是　$S_{\triangle ADE}=\frac{1}{2}|AE|\cdot y_D=\frac{1}{2}\left(3-\frac{2-a}{b-1}-2\right)\cdot b=\frac{1}{2}\cdot\frac{a+b-3}{b-1}\cdot b.$

同理，得　$S_{\triangle CDF}=\frac{1}{2}\cdot\frac{a+b-3}{a-1}\cdot a.$

$$S_{四边形ABCD}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot b+\frac{1}{2}\cdot 3\cdot a=\frac{3}{2}(a+b).$$

由已知易得　$\frac{1}{2}\cdot\frac{a+b-3}{b-1}\cdot b=\frac{1}{2}\cdot\frac{a+b-3}{a-1}\cdot a=\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{2}(a+b).$

解得 $a=b=3$. 即 $D(3,3)$. 故 $ABCD$ 为平行四边形.

例 11　如图 6 - 18，H 是$\triangle ABC$ 的垂心，P 是$\triangle ABC$ 内任一点，由 H 分别向 PA,PB,PC 引垂线 HL,HM,HN，分别与 BC,CA,AB 的延长线相交于 X,Y,Z，其中 L,M,N 为垂足. 求证：X,Y,Z 三点共线.

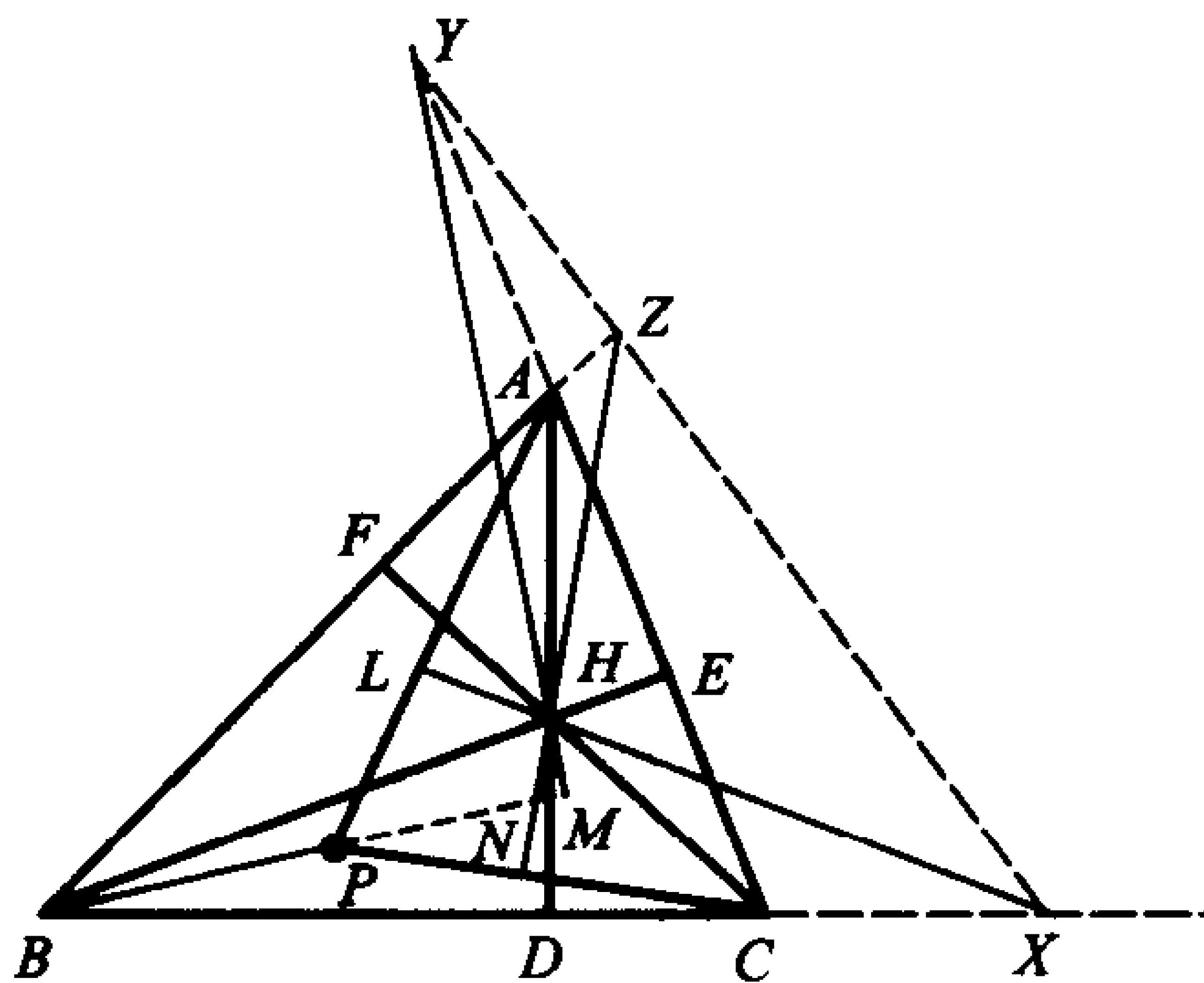


图 6 - 18

证明　由于 H 是一特殊点，将其作为反演中心，则只须证 X,Y,Z 的像点（或交点）与 H 共圆.

设$\triangle ABC$ 的高线分别交 BC,CA,AB 的垂足为 D,E,F，则 $HA\cdot HD=HB\cdot HE=HC\cdot HF$. 又 A,D,L,X 共圆，有 $HL\cdot HX=HA\cdot HD$.

同理，$HM\cdot HY=HB\cdot HE, HN\cdot HZ=HC\cdot HF$.

以 H 为反演中心，则 L 与 X，N 与 Z，M 与 Y 均为反点. 又 L,P,N,H 共圆，L,P,M,H 共圆，有 L,N,M,H 共圆. 故 X,Z,Y 三点共直线.

例 12　如图 6 - 19，四边形 $ABCD$ 内接于圆 O，对角线 AC 与 BD 相交于 P. 设三角形 ABP,BCP,CDP 和 DAP 的外接圆心分别是 O_1,O_2,O_3,O_4. 求证：OP,O_1O_3,O_2O_4 三直线共点.

证明　由于本题涉及的圆很多，于是可考虑反演变换. 取 P 为反演中心，P 关于圆 O 的幂为反演基圆半径，则圆 O 反演为本身，$\odot O_i(i=1,2,3,4)$反演为四边形 $ABCD$ 各边所在直线，过点 P 的直线也反演为本身.

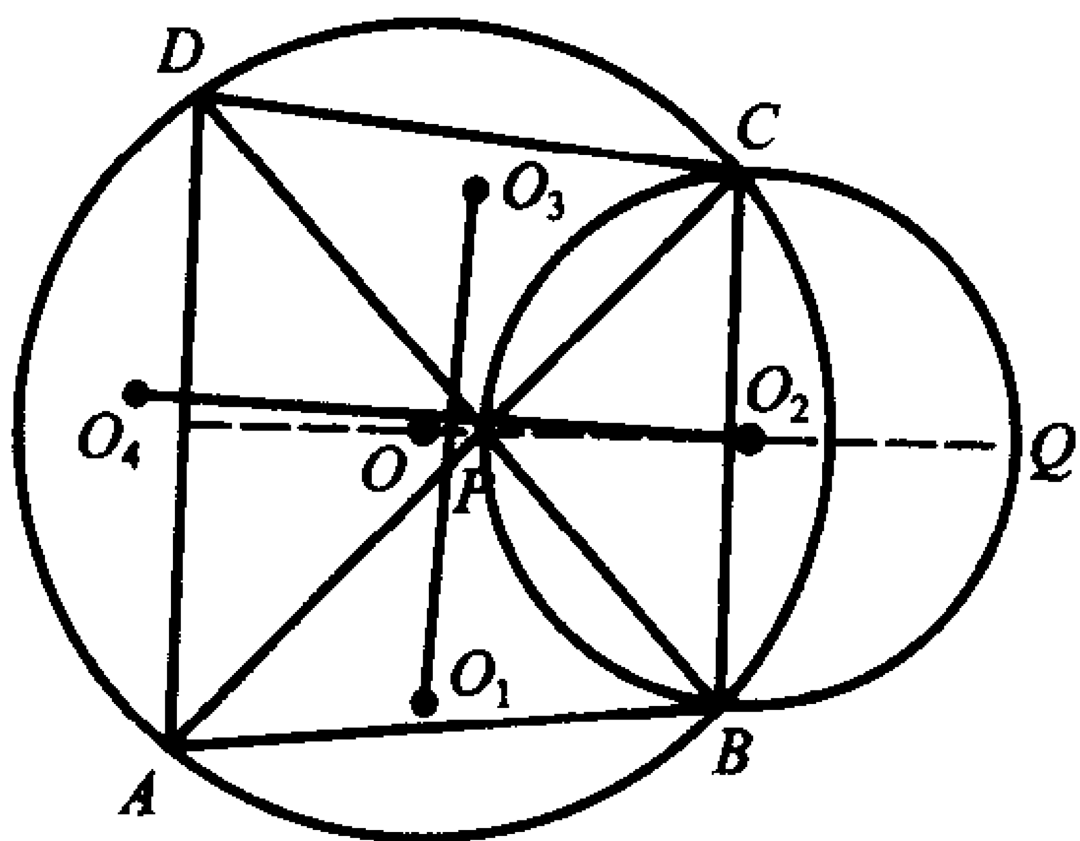


图 6 - 19

由直线 PO_2 与$\odot O_2$ 正交，可知它们的反形也正交，即 $PO_2\perp AD$. 又易知 $O_4O\perp AD$，所以 $PO_2 /\!/ O_4O$.

同理，$PO_4 /\!/ O_2O$. 所以 PO_2OO_4 为平行四边形，PO，O_2O_4 相交于 PO 的中点.

同理，PO，O_1O_3 也相交于 PO 的中点. 命题得证.

附录二 矩阵与变换

矩阵不仅是现代数学中的一个极为重要的工具，也是日常生活中、数学各分支中见得较多的数学对象表示形式. 中学几何中的各类变换，运用矩阵表示出来，让人看上去一目了然.

一、矩阵与几何变换

在一种几何变换下，原图 F 上的点 P 变成变换后的图形 F' 上的一个点 P'，这时我们说，在这个变换下 P 被映射到 P'（记作 $P\to P'$），并称 P' 是 P 的像点（或像）. 我们可以把反射、旋转、平移、拉伸、切变（线性等积）等几种几何变换放到坐标平面上加以考察，并用矩阵来描述.

1. 轴反射

图形 F 中各点关于直线 l 的各对称点所组成的图形 F'，称为图形 F 的对称图形. 将一个图形 F 变为它的对称图形 F' 的变换称为轴反射（又称轴对称），l 叫做反射（对称）轴.

对于直线 Oy 作反射时，任一点 $P(x,y)$ 被映射到点 $P'(x',y')$，由于反射时 y 坐标不会改变，而 x 坐标要变号，所以有

$$\begin{cases}x'=-x,\\ y'=y\end{cases}\Rightarrow\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}.$$

类似的，对于直线 Ox 作反射则有

$$\begin{cases}x'=x,\\ y'=-y\end{cases}\Rightarrow\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}.$$

2. 旋转

将平面图形 F 绕这平面内一个定点 O 旋转一个定角 α，这样的变换叫做旋转变换. O 点叫做旋转中心，α 叫做旋转角.

对于绕坐标系原点 O 按逆时针方向旋转 α 角时，任一点 $P(x,y)$ 被映射到点 $P'(x',y')$，由于 $P(r\cos\theta, r\sin\theta)$，$P'(r\cos(\theta+\alpha), r\sin(\theta+\alpha))$，所以有

$$\begin{cases}x'=x\cdot\cos\alpha-y\cdot\sin\alpha,\\ y'=x\cdot\sin\alpha+y\cdot\cos\alpha\end{cases}\Rightarrow\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}.$$

3. 平移

把图形 F 上的所有点都按一定方向移动一定距离形成图形 F'，则由 F 到

F'的变换叫做平移变换.

点 $P(x,y)$在水平方向平移的距离是 h,在垂直方向移动的距离是 k,到达点 $P'(x',y')$,则

$$\begin{cases}x'=x+h,\\ y'=y+k\end{cases}\Rightarrow\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&h\\0&1&k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ 1\end{bmatrix},$$

$$\text{或}\begin{bmatrix}x'\\ y'\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&h\\0&1&k\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ 1\end{bmatrix}.$$

4. 位似

如果两个图形 F 与 F'的任一双对应点 A 与 A'的连线都通过同一点 O,且 $OA':OA=k$(常数),则这两个图形叫做位似图形.定点 O 叫做位似中心,常数 k 称为位似比.这种由位似中心 O 及位似比所确定的把图形 F 变为 F'的变换称为位似变换.

对于位似中心在坐标系原点 O 的位似,点 $P(x,y)$被映射到点 $P'(x',y')$,则

$$\begin{cases}x'=kx,\\ y'=ky\end{cases}\Rightarrow\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k&0\\0&k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}.$$

5. 拉伸(线性伸缩)

将平面图形 F 作平行于 Ox 轴的拉伸,则

$$\begin{cases}x'=k_1x,\\ y'=y\end{cases}\Rightarrow\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k_1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix};$$

将平面图形 F 作平行于 Oy 轴的拉伸,则

$$\begin{cases}x'=x,\\ y'=k_2y\end{cases}\Rightarrow\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&k_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}.$$

6. 伸缩

将平面图形 F 既作平行于 Ox 轴的拉伸,又作平行于 Oy 轴的拉伸的变换,叫做伸缩变换.

则
$$\begin{cases}x'=k_1x,\\ y'=k_2y\end{cases}\Rightarrow\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k_1&0\\0&k_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}.$$

7. 恒等

图形的位置和性质都不改变的变换,叫做恒等变换.坐标平面上任一点 $P(x,y)$,变换后仍然是$(x',y')=(x,y)$,即

$$\begin{cases}x'=x,\\ y'=y\end{cases}\Rightarrow\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}.$$

8. 切变(线性等积)

保持图形面积大小不变,而点间距离和线间夹角可以改变,且点沿坐标轴运动的变换叫做切变.

若坐标平面内任意一点 $P(x,y)$,沿水平方向(x 轴)移动的距离同这点的纵坐标成正比为 k_1,得到 $P'(x,y')$,则

$$\begin{cases}x'=x+k_1y,\\ y'=y\end{cases}\Rightarrow\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & k_1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}.$$

若坐标平面内任意一点 $P(x,y)$,沿铅垂方向(y 轴)移动的距离同这点的横坐标成正比为 k_2,得到 $P'(x',y')$,则

$$\begin{cases}x'=x,\\ y'=y+k_2x\end{cases}\Rightarrow\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ k_2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}.$$

9. 仿射

我们将直线变到直线,且保持直线的平行关系的变换称为仿射变换.

设 $P(x,y)$为平面直角坐标点,被映射到点 $P'(x',y')$,且设仿射坐标系原点为(h,k),仿射轴 $O'x'$上单位点为(a_1,b_1),仿射轴 $O'y'$上单位点为(a_2,b_2),则

$$\begin{cases}x'=x(a_1-h)+y(a_2-h)+h,\\ y'=x(b_1-k)+y(b_2-k)+k\end{cases}\Rightarrow\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1-h & a_2-h & h\\ b_1-k & b_2-k & k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ 1\end{bmatrix}$$

或

$$\begin{bmatrix}x'\\ y'\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1-h & a_2-h & h\\ b_1-k & b_2-k & k\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ 1\end{bmatrix}.$$

特别地,当仿射坐标系原点与直角坐标系原点重合时,即 $h=0,k=0$ 时,有

$$\begin{bmatrix}x'\\ y'\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & 0\\ b_1 & b_2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ 1\end{bmatrix}$$

或

$$\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}.$$

上面,我们运用矩阵描述了一系列几何变换.此时,我们把这些几何变换中的矩阵分别叫做反射、旋转、平移、位似、拉伸、伸缩、恒等、切变、仿射的矩阵.

根据矩阵元素的特征,我们可以看出这些几何变换的包含、隶属关系.

例如,这些变换均可以归结为仿射变换;这些变换取特殊情形均可为恒等变换等等.

根据矩阵的乘法运算，我们可以推得这些变换的复合变换形式、性质.

例如，对直线 Oy 连续作两次反射得恒等变换；作平行于 Ox 轴的拉伸后，又作平行于 Oy 轴的拉伸，得到伸缩变换；还可得旋转平移、位似旋转等等复合变换.

根据矩阵的求逆运算，我们可以推得这些变换的逆变换.

例如，切变矩阵 $\begin{bmatrix}1 & a\\0 & 1\end{bmatrix}$ 的逆矩阵是 $\begin{bmatrix}1 & -a\\0 & 1\end{bmatrix}$，这是由于 $\begin{bmatrix}1 & -a\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & a\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$.

思 考 题 1

1. 运用仿射变换的矩阵表示来写出本节中的其他变换.
2. 用矩阵表示出平移、位似旋转的复合变换.

二、矩阵与坐标变换

坐标变换是平面解析几何中的重要内容，是化简平面曲线方程的主要工具. 用矩阵方法表示这些变换公式，不仅可以揭示各个公式间的内在联系，加深对知识的理解，而且可以提供一种“集成”记忆这些公式的方法.

1. 坐标轴的旋转

在平面直角坐标系中，将坐标轴旋转 θ 角，得旋转公式

$$\begin{cases}x'=x\cos\theta+y\sin\theta,\\ y'=-x\sin\theta+y\cos\theta\end{cases}\Rightarrow\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\-\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

或

$$\begin{bmatrix}x'\\y'\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\-\sin\theta & \cos\theta & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\1\end{bmatrix}.$$

下面讨论一般二元二次方程的化简公式.

一般的二元二次方程形如

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0,$$

经过坐标轴旋转变换后，上述方程变为

$$A'x'^2+B'x'y'+C'y'^2+D'x'+E'y'+F'=0.$$

它们系数之间的关系可由如下矩阵关系式表示

$$\begin{bmatrix}2A' & B' & D'\\B' & 2C' & E'\\D' & E' & 2F'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\-\sin\theta & \cos\theta & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2A & B & D\\B & 2C & E\\D & E & 2F\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\\sin\theta & \cos\theta & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix},\text{(附 2 - 1)}$$

且关于二次项系数有

$$\begin{bmatrix} 2A' & B' \\ B' & 2C' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2A & B \\ B & 2C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}; \quad (附\ 2-2)$$

关于一次项系数有

$$\begin{bmatrix} D' \\ E' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} D \\ E \end{bmatrix};$$

常数项保持不变，即 $F'=F$.

由上面的式子，我们有

第一，可以更明显地看出，经过坐标轴旋转变换后，方程的不同次项系数互不干扰；

第二，转轴的目的，是为了消去新方程中的 $x'y'$ 项，即使得 $B'=0$. 此时，$B\neq 0$ 时由(附 2-2)式可求得 A' 和 C' 的简化公式

$$\begin{cases} A'=A+\frac{1}{2}B\cdot\tan\theta=C+\frac{1}{2}B\cdot\cot\theta, \\ C'=A-\frac{1}{2}B\cdot\cot\theta=C-\frac{1}{2}B\cdot\tan\theta. \end{cases}$$

第三，由(附 2-1)、(附 2-2)式，两边考虑取行列式，则得转轴不变量

$$I_3=\begin{vmatrix} 2A & B & D \\ B & 2C & E \\ D & E & 2F \end{vmatrix}, I_2=\begin{vmatrix} 2A & B \\ B & 2C \end{vmatrix}, I_1=F.$$

下面，运用坐标旋转变换推导三角中正、余弦的两角和公式.

在平面直角坐标系中，先将坐标轴旋转 α 角，再又继续旋转 β 角，则有

$$\begin{cases} x'=x\cdot\cos\alpha+y\cdot\sin\alpha, \\ y'=-x\cdot\sin\alpha+y\cdot\cos\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

及

$$\begin{cases} x''=x'\cdot\cos\beta+y'\cdot\sin\beta, \\ y''=-x'\cdot\sin\beta+y'\cdot\cos\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}.$$

此时，又可看作是将坐标轴旋转 $\alpha+\beta$ 角，则

$$\begin{cases} x''=x\cdot\cos(\alpha+\beta)+y\cdot\sin(\alpha+\beta), \\ y''=-x\cdot\sin(\alpha+\beta)+y'\cdot\cos(\alpha+\beta) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & \sin(\alpha+\beta) \\ -\sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

于是有

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & \sin(\alpha+\beta) \\ -\sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix},$$

即

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta & \cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta \\ -(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta) & -\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos(\alpha+\beta) & \sin(\alpha+\beta)\\ -\sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta)\end{bmatrix},$$

由此便推导出了 $\cos(\alpha+\beta)$、$\sin(\alpha+\beta)$的公式.

2. 坐标轴的平移

在平面内,将坐标原点移到点(h,k),得平移公式

$$\begin{cases}x'=x-h,\\ y'=y-k\end{cases}\Rightarrow\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -h\\ 0 & 1 & -k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ 1\end{bmatrix}$$

或
$$\begin{bmatrix}x'\\ y'\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & -h\\ 0 & 1 & -k\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ 1\end{bmatrix},$$

下面,讨论一般二元二次方程的化简公式.方程 $Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 经坐标轴的平移变换后,变为 $A'x'^2+B'x'y'+C'y'^2+D'x'+E'y'+F'=0$,它们系数之间的关系可由下列矩阵关系表示

$$\begin{bmatrix}2A' & B' & D'\\ B' & 2C' & E'\\ D' & E' & 2F'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ h & k & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2A & B & D\\ B & 2C & E\\ D & E & 2F\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & h\\ 0 & 1 & k\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

由上述式子,我们可知移轴变换下的不变量是

$$I_3=\begin{vmatrix}2A & B & D\\ B & 2C & E\\ D & E & 2F\end{vmatrix},A,B,C.$$

3. 一般的坐标变换

如果在一个坐标变换中,既有移轴,又有旋轴,就称为一般的坐标变换.将坐标原点平移到(h,k)后,再将坐标轴旋转 θ 角,得公式

$$\begin{cases}x=x'\cdot\cos\theta-y'\cdot\sin\theta+h,\\ y=x'\cdot\sin\theta+y'\cdot\cos\theta+k,\end{cases}$$

亦即
$$\begin{cases}x'=\cos\theta\cdot(x-h)+\sin\theta\cdot(y-k),\\ y'=-\sin\theta\cdot(x-h)+\cos\theta\cdot(y-k)\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}x'\\ y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x-h\\ y-k\end{bmatrix}.$$

一般二元二次方程在上述变换下所得新二次方程,它们的系数间有如下关系:

$$\begin{bmatrix}2A' & B' & D'\\ B' & 2C' & E'\\ D' & E' & 2F'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta & 0\\ -\sin\theta & \cos\theta & 0\\ h & k & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2A & B & D\\ B & 2C & E\\ D & E & 2F\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & h\\ \sin\theta & \cos\theta & k\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

且同次项系数有

$$\begin{bmatrix}2A' & B'\\ B' & 2C'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2A & B\\ B & 2C\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}D'\\ E'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2Ah+Bk+D\\ Bh+2Ck+E\end{bmatrix},$$

$$F'=Ah^2+Bhk+Ck^2+Dh+Ek+F.$$

由此可见，在一般坐标变换下，二元二次方程的系数变化规律是：二次项系数与旋轴变换的结果相同；常数项与移轴的结果相同；一次项系数与先平移后旋转轴的变换结果相同.

例　将方程 $29x^2-24xy+36y^2+82x-96y-91=0$ 化为标准方程.

解　由求心公式，得 $h=-1, k=1$.

又由求旋转角公式，得 $\cos\theta=\frac{4}{5}, \sin\theta=\frac{3}{5}$.

作坐标轴变换 $\begin{cases}x=\frac{4}{5}x'-\frac{3}{5}y'-1,\\ y=\frac{3}{5}x'+\frac{4}{5}y'+1,\end{cases}$

又由题设有 $\begin{bmatrix}2A & B & D\\ B & 2C & E\\ D & E & 2F\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}58 & -24 & 82\\ -24 & 72 & -96\\ 82 & -96 & -182\end{bmatrix},$

故

$$\begin{bmatrix}2A' & B' & D'\\ B' & 2C' & E'\\ D' & E' & 2F'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{4}{5} & \frac{3}{5} & 0\\ -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 0\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}58 & -24 & 82\\ -24 & 72 & -96\\ 82 & -96 & -182\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & -1\\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}40 & 0 & 0\\ 0 & 90 & 0\\ 0 & 0 & -360\end{bmatrix},$$

所以原方程化为 $20x'^2+45y'^2-180=0$，即$\dfrac{x'^2}{9}+\dfrac{y'^2}{4}=1$.

思考题 2

1. 坐标轴经平移再旋转后，点 $A(0,1)$ 和点 $B(1,0)$ 变换成 $A''(0,0)$ 和 $B''(0,-\sqrt{2})$. 求平移公式和旋转公式.

2. 已知点 $P(1,2)$，将点 P 绕原点按逆时针方向旋转 $60°$ 后，再将此点沿 x 轴正向平移 5 个单位到达点 Q. 求点 Q 的坐标.

第七章　立体几何研究与解题

立体几何教学的关键是空间概念的建立和善于把立体几何问题进行转化处理.空间概念的建立,识图是起点,是培养、检验空间概念的重要手段.画图能力的培养对建立空间概念的作用是巨大的,且在求解立体几何问题时,辅助线、辅助面或辅助体总得自己画,正确的示意图是正确判定有关几何元素间的位置(共面、共线、共点)的前提.

第一节　立体图形、截面图形、投影图形的画法

空间是三维的,因此,在空间不能像在平面上运用圆规和直尺直接完成画图.因此,空间画图常以平面画图的方法为基础,再根据人们的视觉原理,采用一些特殊的画法画出图来.在空间画图中,常采用下列画图公法.在这里,我们承认几种基本画图的可解性,其他画图问题,只要能归结到有限次运用画图公法中所列举的基本画图问题而得到解决,便认为问题解决了.

空间画图公法(以下四类问题承认其可解):

(1) 通过不共线三点画一个平面;

(2) 画已知两相交平面的交线;

(3) 在已知平面上用直尺和圆规或代用工具按平面几何中画图解决一切画图问题;

(4) 任取一点,在或不在已知直线上,在或不在已知平面上;任取一直线,通过或不通过一已知点,在或不在已知平面上;任取一平面,通过或不通过一已知点,通过或不通过一已知直线.

1. 空间直线型图形的斜二测画法

画水平放置的平面直线型直观图,画特殊的凸多面体直观图常用斜二测画法.

斜二测画法的规则是:

(1) 画平面图形的直观图时,先在已知平面图形中取定互相垂直的轴 Ox, Oy,在直观图中,画出对应的轴 $O'x'$, $O'y'$,使 $\angle x'O'y'=45^\circ$(或 135°),它们确定的平面表示水平平面.画立体图形的直观图时,在原立体图形的一面中取互相垂直的轴 Ox, Oy,取与这一面垂直的线为 Oz 轴.直观图中画轴 $O'x'$, $O'y'$,

$O'z'$，且使$\angle x'O'y'=45°$（或$135°$），$\angle x'O'z'=90°$；

（2）已知图形中平行于x轴、y轴或z轴的线段，在直观图中分别画成平行于x'轴、y'轴或z'轴的线段；

（3）画已知图形中平行于x轴的线段，在直观图中保持原长度不变；画平行于y轴的线段，在直观图中长度为原来的一半，画平行于z轴的线段，在直观图中长度不变.

2. 空间旋转体图形的正等测画法

圆柱、圆锥、圆台的底面都是圆，圆的直观图，一般不用斜二测画法，而用正等测画法.球的直观图也用正等测画法.

正等测画法的规则是：

（1）在已知图形底面$\odot O$中以O为原点取互相垂直的轴Ox，Oy.在直观图中，把它们画成对应的轴$O'x'$，$O'y'$，使$\angle x'O'y'=120°$（或$60°$），它们确定的平面表示水平平面.过O点作与$\odot O$面垂直的轴Oz.在直观图中，把$O'Z'$轴画成与$O'x'$轴，$O'y'$轴都成$120°$（或$60°$）；

（2）画已知图形中平行于x轴、y轴或z轴的线段，在直观图中，分别画成平行于x'轴、y'轴或z'轴的线段；

（3）画平行于x轴、y轴或z轴的线段，长度都不变.

3. 立体截面图形的画法

截面是求解立体几何问题的主要辅助平面.画过某些已知点的截面图形常常是根据画图公法画出.下举例说明.

例　给定正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$，设P'、Q'、R'分别是侧面ADD_1A_1、ABB_1A_1、BCC_1B_1上的点，画出平面$P'Q'R'$截正方体的截口图形.

解　过点P'、Q'、R'作直线平行于侧棱分别交AD于P，交AB于Q，交BC于R.连PB和QR相交于点O.在平面$QRR'Q'$中通过O作直线平行于RR'，以O'表示它与$Q'R'$交点.由P、O、B三点共线，所以三平行线PP'、OO'、BB_1共面.在这平面中，连$P'O'$交BB_1于点B'，这是一个关键的点.在面ABB_1A_1中连$B'Q'$交AA_1于A'，在面BCC_1B_1中连$B'R'$交CC_1于C'，在面ADD_1A_1中连$A'P'$交DD_1于D'.

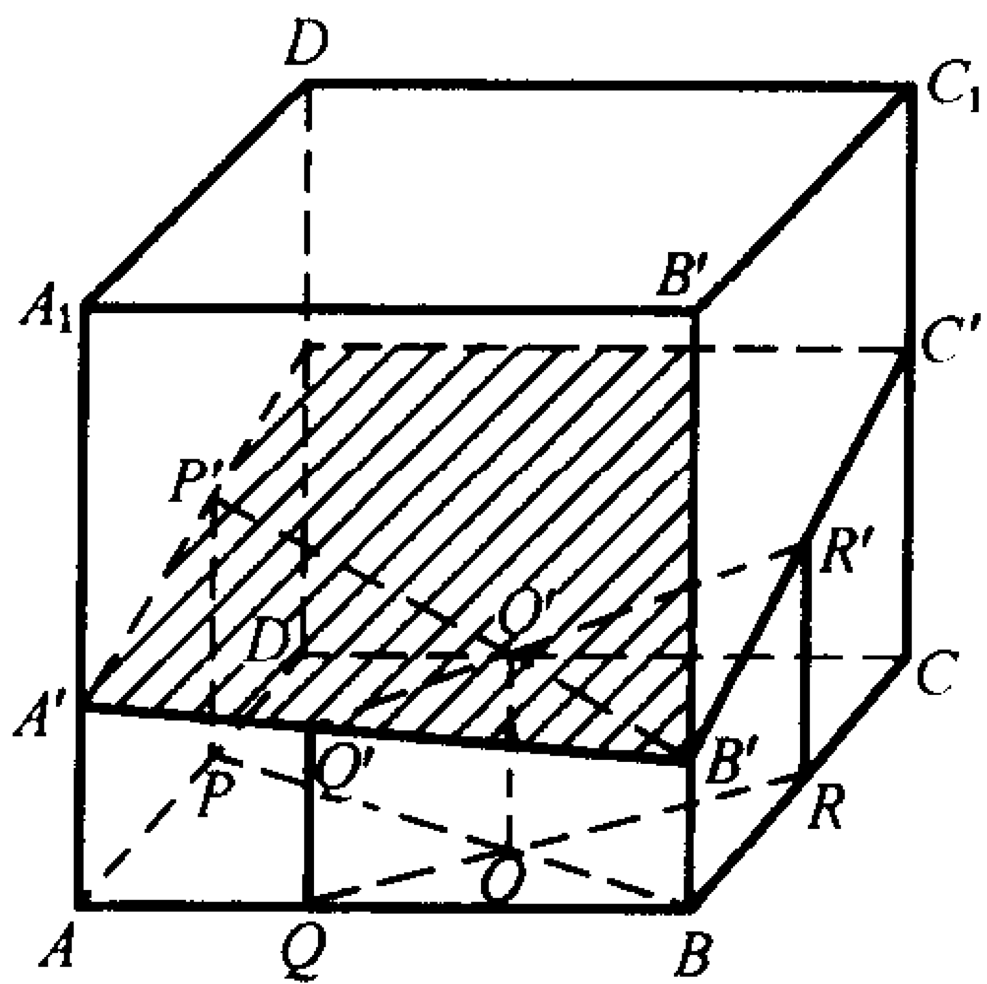


图 7－1

由于B'在平面$P'Q'R'$上（因B'在这平面中的直线$P'O'$上），从而A'、C'在其平面上，又点D'也在其平面上.所以四边形$A'B'C'D'$为所求截口图形.

如果这不共面的三点有某点在棱上，或在体内，均可相应处理.

4. 射影图形的画法及图形与其射影图之间的度量关系

直线垂直相交、直线垂直于平面的概念可用来讨论正射影. 给定一平面 π，从给定一点 A 引平面 π 的垂线则此垂足称为 A 在平面 π 上的正射影，简称射影. 给定图形的所有各点在平面 π 上的射影的集合，称为该图形在平面 π 上的射影图形. 从给定图中各点所作平面 π 的垂线称为各点的投影线.

设 l 是与 π 相交的一直线，通过一点 A 作直线平行于 l，必交 π 于一点 A'，A'称为 A 沿 l 方向在 π 上的平行射影，它是正射影的推广.

在正投影下，若已知角 α 所在平面与投射面平行时，则已知角 α 与其投射角 α' 相等；若已知角 α 所在平面与投影面垂直时，则投射角 α' 为 $0°$ 或 $180°$；若已知角 α 所在平面与投射面斜交成二面角且其度数为 $\theta(0°<\theta<90°)$ 时，情况比较复杂，要分情况讨论(参见习题 7.1 第 3 题).

空间几何体截面或侧面与其射影的面积有以下关系：设截面或侧面与其射影面所在平面组成的二面角为 θ，则截面或侧面面积 S 与其射影面面积 S' 满足关系式

$$S'=S\cdot\cos\theta.$$

习　题　7.1

1. 运用斜二测画法作正五棱锥的直观图.

2. 运用正等测画法作球的直观图.

3. 若已知角 α 所在平面与投射面斜交成二面角 $\theta(0°<\theta<90°)$，讨论其投射角 α' 与 α 的大小关系.

第二节　直线、平面的平行、垂直关系的对偶性

1. 对偶规律及其例子

如果我们把两条重合直线看成平行直线的特殊情形，把两个重合平面看成平行平面的特殊情形，把直线在平面内看成直线与平面平行的特殊情形，那么，在立体几何中，有关直线与平面的平行与垂直的命题存在下列规律：

把命题中某一直线(平面)换以平面(直线)，同时把与这一直线(平面)有关的平行(垂直)关系换以垂直(平行)关系，所得的命题与原命题同真伪.

立体几何中的这个规律与射影几何中的对偶原则有些类似. 但是，两者在本质上是不同的.

下面列举几个例子.

例 1 下列四个命题是同真的.

命题 1 通过空间一点能作且仅能作一条直线 b 与已知直线 a 平行.

如果把命题 1 中的“直线 b”换以“平面 β”,“平行”换以“垂直”,则得

命题 2 通过空间一点能作且仅能作一个平面 β 与已知直线 a 垂直.

命题 2 与命题 1 同真,我们把命题 2 称为命题 1 关于直线 b 的对偶命题;把命题 1 称为命题 2 关于平面 β 的对偶命题.

把命题 2 中的“直线 a”换以“平面 α”,“垂直”换以“平行”,则得

命题 3 通过空间一点能作且仅能作一个平面 β 与已知平面 α 平行.

命题 3 与命题 2 同真,命题 3 称为命题 2 关于直线 a 的对偶命题,命题 2 称为命题 3 关于平面 α 的对偶命题.

类似地,命题 3 关于平面 β 的对偶命题是:

命题 4 通过空间一点能作且仅能作一条直线 b 与已知平面 α 垂直.

命题 4 与命题 3 同真.

例 2 下列六个命题是同真的:

命题 5 直线 a 和直线 b 不平行⇒不存在直线 c,使得 $c/\!/a$,$c/\!/b$.

命题 6 平面 α 和直线 b 不垂直⇒不存在直线 c,使得 $c\perp\alpha$,$c/\!/b$.

命题 7 平面 α 和平面 β 不平行⇒不存在直线 c,使得 $c\perp\alpha$,$c\perp\beta$.

命题 8 平面 α 和平面 β 不平行⇒不存在平面 γ,使得 $\gamma/\!/\alpha$,$\gamma/\!/\beta$.

命题 9 直线 a 和平面 β 不垂直⇒不存在平面 γ,使得 $\gamma\perp a$,$\gamma/\!/\beta$.

命题 10 直线 a 和直线 b 不平行⇒不存在平面 γ,使得 $\gamma\perp a$,$\gamma\perp b$.

从命题 6 到命题 10,每后一个命题都是前一个命题关于某一元素(直线或平面)的对偶命题,这些命题同真.

下面的例题涉及直线在平面上的一种结合关系,我们约定“直线在平面上”也说成“平面在直线上”.一个命题换成其对偶命题时,若是平面换直线,则“在平面上的直线”必须相应地换成“在直线上的平面”,反之亦然.

例 3 下列四个命题是同真的:

命题 11 若直线 a 平行于平面 β 上的一条直线 b,则 $a/\!/\beta$.

命题 12 若直线 a 垂直于直线 b 上的一个平面 β,则 $a\perp b$.

命题 13 若平面 α 平行于直线 b 上的一个平面 β,则 $\alpha/\!/b$.

命题 14 若平面 α 垂直于平面 β 上的一条直线 b,则 $\alpha\perp\beta$.

从命题 11 到命题 14,每后一个命题都是前一个命题关于某一元素(直线或平面)的对偶命题.所不同的是,在这组对偶命题中,在把某一直线换成平面时,若存在结合关系,必须把这一直线结合在一起的平面同时换成与平面结合在一起的直线.把平面换成直线时也一样.

如果同时调换一个命题中的两个元素及其相应的关系，所得的命题称为原命题关于这两个元素的双对偶命题.

例如，命题 1 与命题 3 组成双对偶命题.

例 4 下列四个命题同真：

命题 15 若一个平面 M 平行于两条相交直线 p,q，则平行于这两条直线上的平面 N.

命题 16 若一个平面 M 垂直于两个相交平面 P,Q，则垂直于在这两个平面上的直线（即交线）l.

命题 17 若一条直线 l 平行于两个相交平面 P,Q，则平行于这两个平面上的直线（即交线）l.

命题 18 若一条直线 m 垂直于两条相交直线 p,q，则垂直于在这两条直线上的平面 N.

命题 16 是命题 15 关于直线 p,q 的双对偶命题，命题 17 是命题 16 关于平面 M 的对偶命题，命题 18 是命题 17 关于平面 P,Q 的双对偶命题，命题 15 是命题 18 关于直线 m 的对偶命题.

类似地，可定义三对偶命题，四对偶命题. 例如，

命题 19 若两条直线都和第三条直线平行，则互相平行.

命题 20 若两个平面都和第三个平面平行，则互相平行.

命题 19 与命题 20 就组成三对偶命题.

一命题依次轮换各元素，在穷尽所有可能性之后，必然会回到原命题. 我们说，这样一组对偶命题组成一个对偶链. 前面的 4 道例题都各自组成对偶链，对偶链中一个命题成立，则其余命题都成立，对偶链中一个命题不成立，则其余命题都不成立.

2. 规律的理论解释及其启示

我们以非零向量 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$，$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ 分别表示三维空间中的直线的方向向量或平面法向量，对于等式

$$(a_1,a_2,a_3)=k(b_1,b_2,b_3)\ (k\neq 0), \tag{1}$$

当 (a_1,a_2,a_3)，(b_1,b_2,b_3) 均是直线的方向向量或均是平面的法向量时，它是两直线或两平面平行（包括重合意义下的平行）的充要条件；当 (a_1,a_2,a_3)，(b_1,b_2,b_3) 之一为直线的方向向量，另一为平面的法向量时，它是直线与平面垂直的充要条件.

对于等式

$$(a_1,a_2,a_3)\cdot(b_1,b_2,b_3)=0, \tag{2}$$

当 (a_1,a_2,a_3)，(b_1,b_2,b_3) 均是直线的方向向量或均是平面的法向量时，它是两

直线或两平面垂直的充要条件；当(a_1,a_2,a_3)，(b_1,b_2,b_3)之一为直线的方向向量，另一为平面的法向量时，它是直线与平面平行的充要条件.

这样，在等式(1)或(2)中，对其中任一向量给以不同的几何解释，相应地便得出不同的几何命题. 当等式(1)或(2)为真(伪)时，由不同的几何解释所相应的不同的几何命题也就同真(伪). 另一方面，由一个有关平行或垂直的几何命题为真，也可以相应地列出等式(1)或(2)，从而由不同的几何解释所引出的其他几何命题亦真.

在涉及结合关系的情形下，我们可注意到直线或平面的定向向量(a_1,a_2,a_3)与(b_1,b_2,b_3)所相应的几何形式为A与B时，(i) 两直线(平面)A,B重合的条件是$(a_1,a_2,a_3)=k(b_1,b_2,b_3)$，$A\cap B\neq\varnothing$；(ii) 两直线$A,B$相交的条件是$(a_1,a_2,a_3)\neq k(b_1,b_2,b_3)$，$A\cap B\neq\varnothing$；(iii) 直线和平面平行的条件是$(a_1,a_2,a_3)\cdot(b_1,b_2,b_3)=0$，$A\cap B=\varnothing$.

因此，对于涉及等式(1)、(2)的任一模型，对其中多个向量，同时变更其几何解释，得出一些依次"对偶"的几何命题，它们有相同的真伪性. 例如，对例4，我们还可以写出其余$2^4-4=12$个几何命题，它们与命题15～18等同真.

上述理论解释，使我们真正理解到了立体几何中的这个规律与射影几何中的对偶原理的本质不同. 理论解释启示我们，在立体几何中，应适当加强向量法解决立体几何问题的训练. 这也可能是国内、外有些中学教材已把立体几何与空间解析几何融为一体的一个缘故.

习 题 7.2

1. 写出例4中命题15的其余的对偶命题.
2. 写出下列命题的对偶链命题：(1) $m/\!/l, n/\!/l\Rightarrow m/\!/l$；(2) $m\perp l, n\perp l\Rightarrow m/\!/l$.

第三节 空间向量的数量积和向量积

在上一节，我们看到了向量知识在处理立体几何问题中的重要应用，这种应用主要是通过向量的各种运算来体现的. 这一节，我们重点来看一看向量的内积与外积在处理立体几何问题中的一些应用与应用方法.

1. 空间向量的数量积(内积)及应用

设向量$\vec{a}=a_1\vec{i}+a_2\vec{j}+a_3\vec{k}$，$\vec{b}=b_1\vec{i}+b_2\vec{j}+b_3\vec{k}$，则其数量积为一实数；$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$且$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$. 空间向量的数量积与两向量所成的角紧密联系在一起，因此，在讨论空间直线与直线、直线与平面、平面与平面的位置关系时，常可运用向量的数量积运算来处理. 在讨论空间二直线共面或

异面时，因均可归结为共面的情形处理，因而也可运用向量的数量积运算来处理. 这样处理，可以把几何论证代数化.

立体几何中的一些垂直问题，运用向量的空间结构特点及数量积来处理非常方便.

例 1　线面垂直的判定定理的向量证法.

直线和平面垂直的判定定理　如果一条直线和一个平面内的两条相交直线都垂直，那么这条直线垂直于这个平面.

已知：如图 7-2，$m\subset\alpha$，$n\subset\alpha$，$m\cap n=B$，$l\perp m$，$l\perp n$.

求证：$l\perp\alpha$.

证明　设 g 是平面 α 内任意一条直线，又设直线 l、m、n、g 上分别有非零向量 $\vec{l}$，$\vec{m}$，$\vec{n}$，$\vec{g}$，由于 $\vec{m}$，$\vec{n}$ 是平面内两条不共线向量，则由平面向量基本定理，知

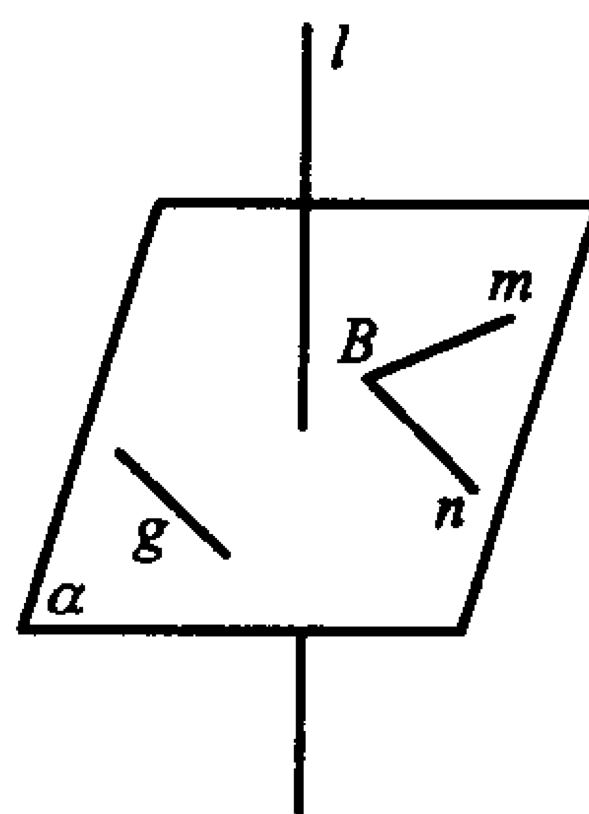


图 7-2

$$\vec{g}=\lambda_1\vec{m}+\lambda_2\vec{n}.$$

由 $l\perp m$，$l\perp n$ 得到 $\vec{l}\cdot\vec{m}=0$，$\vec{l}\cdot\vec{n}=0$.

所以

$$\begin{aligned}\vec{l}\cdot\vec{g}&=\vec{l}\cdot(\lambda_1\vec{m}+\lambda_2\vec{n})\\&=\vec{l}\cdot(\lambda_1\vec{m})+\vec{l}\cdot(\lambda_2\cdot\vec{n})\\&=\lambda_1(\vec{l}\cdot\vec{m})+\lambda_2(\vec{l}\cdot\vec{n})\\&=0.\end{aligned}$$

从而 $\vec{l}\perp\vec{g}$，则直线 $l\perp g$，而 g 是平面 α 内任意一条直线，由直线与平面垂直的定义知 $l\perp\alpha$. 证毕.

在处理有关问题时，常用到空间向量的下列有趣结论及数量积性质：

设$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$是空间中的三个共点不共面的向量，如图 7-3，则有

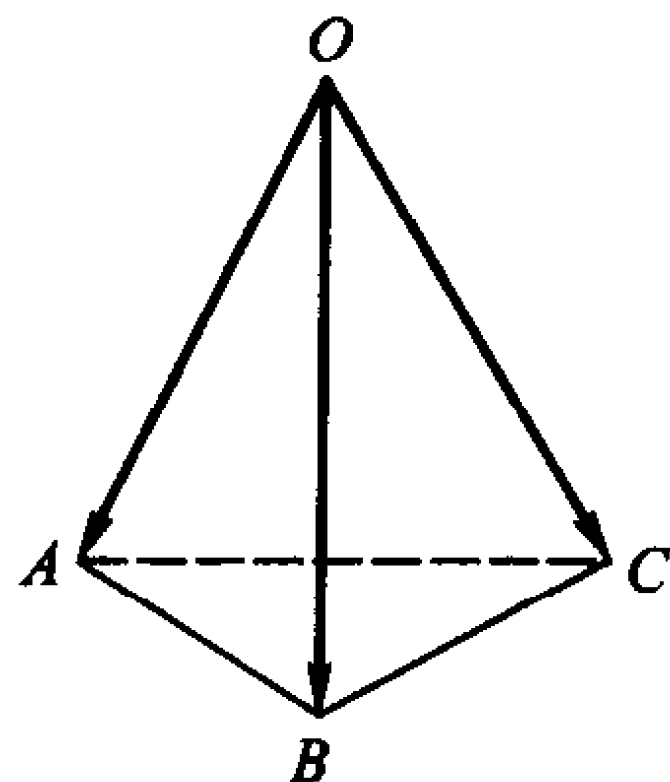


图 7-3

(1) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{BA}$；

$\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{CB}$；

$\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{AC}$.

(即按一定顺序对棱所表示的向量之和相等)

(2) $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$.

(即空间四面体其顶点的三个向量，每一个向量与其他两个向量的差的数量积的顺序之和等于零)

证明 (1) 可由向量的运算性质直接得到.(略)

(2) 因为$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OC}$,所以

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB}\\=&\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB}\\=&\overrightarrow{OC}\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB})+\overrightarrow{OB}\cdot(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AO})\\=&\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{CO}\\=&0.\end{aligned}$$

当$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}$是共线向量时,由(2)可得下面的有趣结论:

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{AC}.$$

例 2 证明:四面体对棱夹角公式.

在四面体 $ABCD$ 中,设棱 AD 和 BC 所成的角为 α,则

$$\cos\alpha=\left|\frac{(AB^2+CD^2)-(AC^2+BD^2)}{2AD\cdot BC}\right|.$$

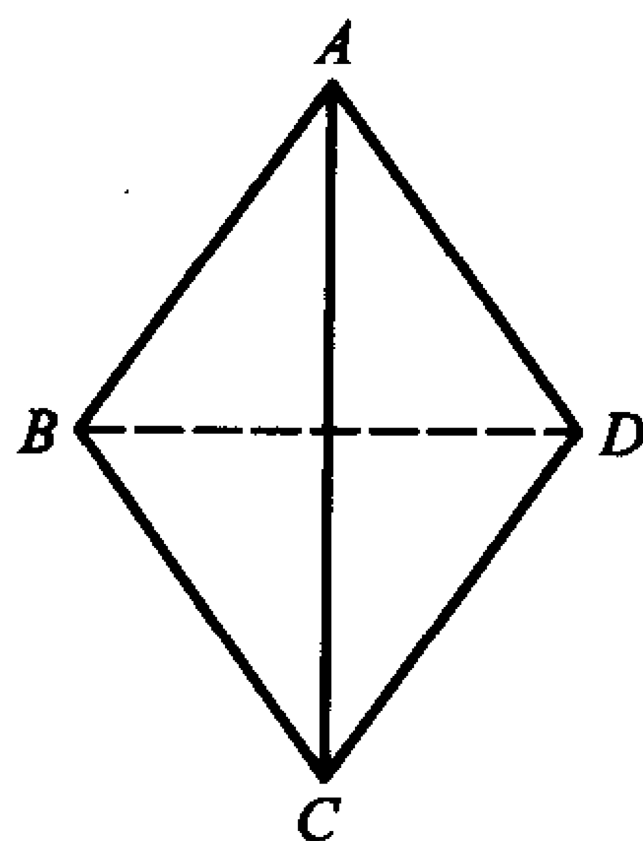


图 7-4

证明 如图 7-4,由空间向量性质,知

$$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}=0.$$

所以 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}$(注意$\overrightarrow{CD}=-\overrightarrow{DC}$).

又因为 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{BC}|\cos\langle\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BC}\rangle$,

所以 $\cos\langle\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BC}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DB}}{|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{BC}|}$

$$=\left(\frac{(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})^2-\overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{DC}^2}{2}-\frac{(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB})^2-\overrightarrow{AC}^2-\overrightarrow{DB}^2}{2}\right)\Big/|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{BC}|$$

(注意 $2\vec{a}\cdot\vec{b}=(\vec{a}+\vec{b})^2-\vec{a}^2-\vec{b}^2$).

注意到空间向量性质$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}$.

所以上式 $\cos\langle\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BC}\rangle=\dfrac{\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{DB}^2-\overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{DC}^2}{2|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{BC}|}$.

于是 $\cos\alpha=|\cos\langle\overrightarrow{AD},\overrightarrow{BC}\rangle|=\left|\dfrac{(AB^2+CD^2)-(AC^2+BD^2)}{2AD\cdot BC}\right|$.

以向量数量积为工具,解决立体几何中求角度、距离等问题,可以减少辅助线的添加,还可避开一些较复杂的空间图形,降低了解题难度,且思路明确,易于下手,过程程序化,易于接受.

例 3 巧设法向量(即与平面垂直的方向向量)求点面距离与线面角.

已知棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，E，F 分别是棱 B_1C_1 和 C_1D_1 的中点.

(1) 求证：E、F、B、D 共面；

(2) 求点 A_1 到平面 $BDFE$ 的距离.

(3) 求直线 A_1D 与平面 $BDFE$ 所成的角.

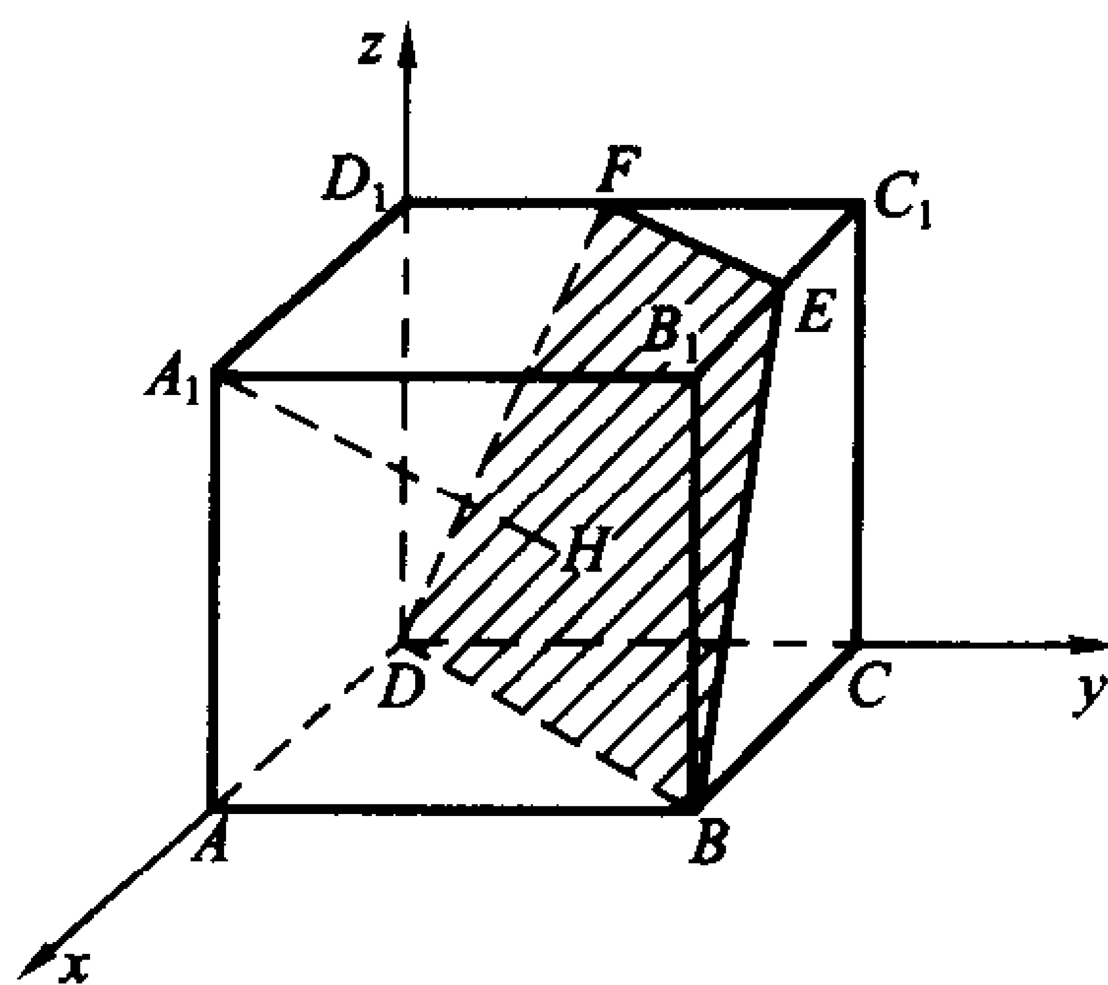


图 7-5

解　建立如图 7-5 所示的空间直角坐标系 $D-xyz$. 则 $D(0,0,0)$，$B(1,1,0)$，$E\left(\frac{1}{2},1,1\right)$，$F\left(0,\frac{1}{2},1\right)$.

(1) 由 $\overrightarrow{DB}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{FE}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)$ 知 $\overrightarrow{DB}=2\overrightarrow{FE}$，故 E、F、B、D 共面.

(2) 设 $\vec{n}=(x,y,z)$ 是平面 $BDFE$ 的法向量. 由 $\vec{n}\perp\overrightarrow{DB}$，$\vec{n}\perp\overrightarrow{DF}$，$\overrightarrow{DB}=(1,1,0)$，$\overrightarrow{DF}=\left(0,\frac{1}{2},1\right)$ 得

$$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{DB}=x+y=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{DF}=\frac{1}{2}y+z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-y,\\ z=-\frac{y}{2}.\end{cases}$$

设点 A_1 在平面 $BDFE$ 上的射影为 H，连结 A_1D. 因 A_1D 是平面 $BDFE$ 的斜线段，令 $y=1$，得 $\vec{n}=\left(-1,1,-\frac{1}{2}\right)$，则

$$\cos\langle\overrightarrow{A_1D},\overrightarrow{A_1H}\rangle=\frac{\overrightarrow{A_1D}\cdot\vec{n}}{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{A_1D}|}=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

于是 $|\overrightarrow{A_1H}|=|\overrightarrow{A_1D}|\cdot\cos\langle\overrightarrow{A_1D},\overrightarrow{A_1H}\rangle=\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=1.$

所以，点 A_1 到平面 $BDFE$ 的距离为 1.

(3) 由(2)知 $\angle DA_1H=45°$，$\angle A_1DH$ 是直线 A_1D 与平面 $BDFE$ 所成角，且 $\angle DA_1H+\angle A_1DH=90°$，所以 $\angle A_1DH=45°$.

最后，我们顺便指出，利用数量积，建立平面方程是很方便的.

设平面 π 的一个法向量为 $\vec{p}$，定点为 M_0，于是过 M_0 且具有法向量 $\vec{p}$ 的平面就唯一确定了.

设 M 是平面 π 上任一点，则 $\overrightarrow{M_0M}\perp\vec{p}$，从而 $\vec{p}\cdot\overrightarrow{M_0M}=0$，即 $\vec{p}\cdot(\vec{r}-\vec{r}_0)=0$

(其中 $\vec{r}$,$\vec{r}_0$ 分别表示点 M 及 M_0 的向径$\overrightarrow{OM}$及$\overrightarrow{OM_0}$).

此式称为平面方程的向量表示.

2. 空间向量的向量积(外积)及应用

空间两非零向量 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 的向量积是一个向量 $\vec{c}$,其方向与 $\vec{a}$,$\vec{b}$ 都垂直,且 $\vec{a}$,$\vec{b}$,$\vec{c}$ 构成右手系. 由于两向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的向量积 $\vec{a}\times\vec{b}$ 的模为 $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\langle\vec{a},\vec{b}\rangle$,即两向量的向量积与两向量的模构成的平行四边形面积紧密联系在一起,从而运用向量积可以处理立体几何的有关面积问题. 同时,还可得到:

(1) $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线(平行)时,则 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$;

(2) 两向量的向量积与数量积有关系式:$(\vec{a}\times\vec{b})^2+(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2$;

(3) 在$\triangle ABC$ 中,必有向量等式$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{AB}$成立.

如果将空间三个向量 $\vec{a}$,$\vec{b}$,$\vec{c}$ 中的向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$、$\vec{c}$ 的向量积作数量积,则得到混合积 $\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})$,混合积的绝对值等于以 $\vec{a}$,$\vec{b}$,$\vec{c}$ 的模为公共顶点的棱的平行六面体的体积. 从混合积的几何意义出发,可得到求两条异面直线距离的方法,用于处理与异面直线距离相关的一些问题. 设 d 为两条异面直线 BC,B_1D_1 所在直线的距离,则

$$d=\frac{|(\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{B_1D_1})\cdot\overrightarrow{BB_1}|}{|\overrightarrow{BC}\times\overrightarrow{B_1D_1}|}.$$

又若设 $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$,$\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$,$\vec{c}=(x_3,y_3,z_3)$,则

$$\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}.$$

利用空间向量的向量积,建立空间直线的方程是方便的.

设直线 l 的方向向量为 $\vec{b}$,又知 l 上一个定点 M_0,于是过定点 M_0 且与方向向量平行的直线 l 的方程就唯一确定了.

设 M 是 l 上任一点,由$\overrightarrow{M_0M}/\!/\vec{b}$,则$\overrightarrow{M_0M}\times\vec{b}=\vec{0}$. 或利用$\overrightarrow{M_0M}=t\vec{b}\,(-\infty<t<\infty)$,而$\overrightarrow{M_0M}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OM_0}=\vec{r}-\vec{a}$ 时,则 $\vec{r}=\vec{a}+t\vec{b}$ 称为直线方程的点向式.

若给定不同的两点 $C,D\in l$,且$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$,$\overrightarrow{OD}=\vec{d}$,则 $\vec{b}=\vec{c}-\vec{d}$,且 $\vec{r}=\vec{c}+t(\vec{c}-\vec{d})$ 为直线的两点式方程.

例 4　如图 7-6,已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面 $ABCD$ 是一菱形,又

$\angle PAB=\angle PAD$. 求证：平面 $PAC\perp$ 底面 $ABCD$.

证明　因$\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AP}$是平面 PAC 的法向量，$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}$是底面 $ABCD$ 的法向量，下面计算数量积$(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD})\cdot(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AP})$，并把此积看成三个向量$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}$、$\overrightarrow{AC}$、$\overrightarrow{AP}$的混合积. 即

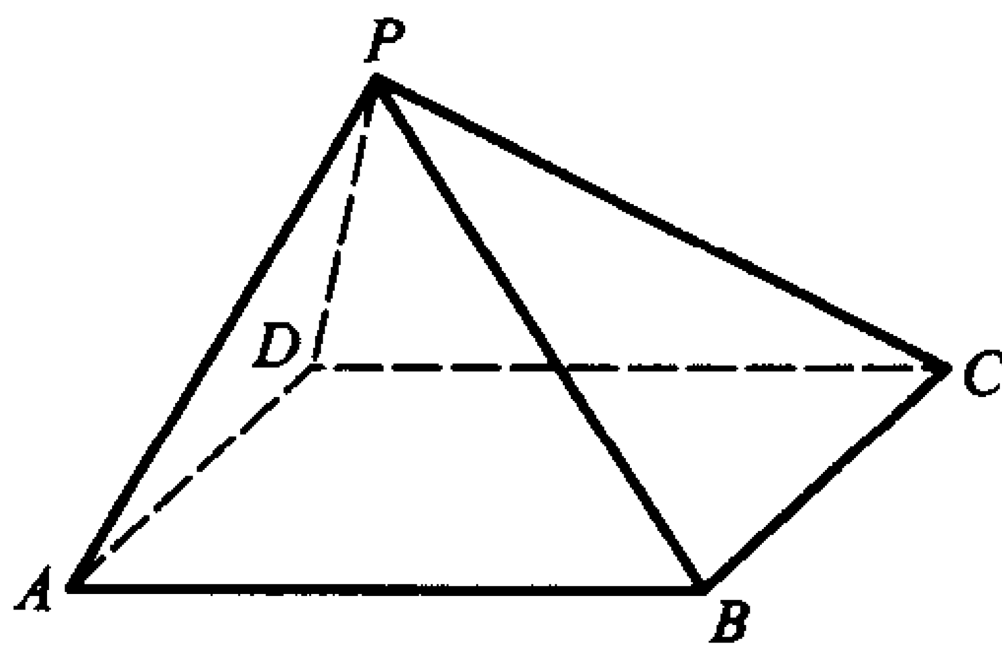


图 7－6

$$
\begin{aligned}
&(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD})\cdot(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AP})\\
&=[(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD})\times\overrightarrow{AC}]\cdot\overrightarrow{AP}\\
&=[(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})\overrightarrow{AD}-(\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC})\overrightarrow{AB}]\cdot\overrightarrow{AP}\\
&=(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AP})-(\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}),
\end{aligned}
$$

又因为$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\rangle$，

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AP}=|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{AP}|\cos\langle\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AP}\rangle$.

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AP}|\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AP}\rangle$，

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{AC}|\cos\langle\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC}\rangle$.

根据已知条件$\angle BAC=\angle DAC$，$\angle PAD=\angle PAB$，有

$$\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\rangle=\cos\langle\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AC}\rangle，\cos\langle\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AP}\rangle=\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AP}\rangle.$$

所以

$$
\begin{aligned}
&(\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD})\cdot(\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AP})\\
&=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{AP}|[\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\rangle\cdot\cos\langle\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AP}\rangle-\cos\langle\overrightarrow{AD},\\
&\quad\overrightarrow{AC}\rangle\cdot\cos\langle\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AP}\rangle]\\
&=0,
\end{aligned}
$$

故$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{AC}\times\overrightarrow{AP}$(从而得知平面 $PAC\perp$ 底面 $ABCD$).

习　题　7.3

1. 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，求证：对角线 A_1C 垂直于 A,B_1,D_1 三点所确定的平面.

2. AB,BC,CD 是不在同一平面内的三条线段，求证：过这三条线段中点的平面与 AC,BD 平行.

第四节　求解立体几何问题的向量法与综合法

向量是数学中的重要概念之一，它广泛应用于生产实践和科学研究中. 向量在立体几何中应用更为直接，是因为立体几何中的两类主要问题：几何元素间的

位置关系和度量关系几乎都可以通过向量运算来解决.

与一个非零向量共线(平行)的向量的充要条件、平面向量的分解定理、空间向量的分解定理,这三个逐步深入的定理是应用向量解决问题的理论基础. 在中学阶段,可以根据不同的教学目标采用证明或者直接用向量图加以说明的方法使学生理解. 此时学生对空间结构能有初步的认识,了解直线上的向量可以由一个非零向量生成,平面上的向量可以由两个不共线的向量生成,空间中的向量可以由三个不共面的向量生成,建立基的概念. 将向量应用到立体几何教学中,不但使有关问题处理得简洁漂亮,而且反复的应用,还使学生熟悉了向量的线性运算和内积运算,更重要的是学会了运用空间结构解决问题的思维方法,即:将相关向量表示为基向量的线性组合,把问题转化为基向量的运算问题. 这与综合法(主要是把空间图形关系转化为平面图形关系)相比,显然是更高的数学思维方式,它抓住了空间的主要特征和内在规律,使"纷繁复杂的现象变得井然有序".

我们曾在平面几何的向量法解题中指出:向量法的特点是形数结合,运算有章可循,既有综合法的灵巧,又有坐标法的方便,能把综合法与坐标法有机地结合在一起. 在立体几何中更体现出这种特点. 它克服了在某些立体几何问题中运用综合法论证常需要添置若干辅助线(辅助图)而显得不易捉摸的缺点,同时向量公式不依赖于坐标系. 因而在很多情形下向量法求解立体几何问题具有一定的优越性.

下面,我们应用向量方法和综合法求解一道问题:

例 如图 7-7,已知平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 是菱形,且 $\angle C_1CB=\angle C_1CD=\angle BCD=60°$. (1) 证明:$C_1C\perp BD$;(2) 当 $\dfrac{CD}{CC_1}$ 的值为多少时,能使 $A_1C\perp$ 平面 C_1BD? 请给出证明.

向量方法求解:

(1) 取 $\overrightarrow{CD},\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CC_1}$ 为空间的一组基向量. 因为 $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}$,$\angle C_1CB=\angle BCD=60°$,且 $ABCD$ 是菱形,则 $|\overrightarrow{CD}|=|\overrightarrow{CB}|$.

所以 $\overrightarrow{CC_1}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CC_1}\cdot(\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB})$

$=\overrightarrow{CC_1}\cdot\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CC_1}\cdot\overrightarrow{CB}=0.$

于是 $C_1C\perp BD$.

(2) 设 $\dfrac{CD}{CC_1}=\lambda(\lambda>0)$,即 $|\overrightarrow{CD}|=\lambda|\overrightarrow{CC_1}|$ 时,能使 $A_1C\perp$ 平面 C_1BD. 由 $C_1D\cap BD=D$,知 $A_1C\perp$ 平面 $C_1BD\Leftrightarrow A_1C\perp C_1D$ 且 $A_1C\perp BD\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{C_1D}=0$,且 $\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{BD}=0$.

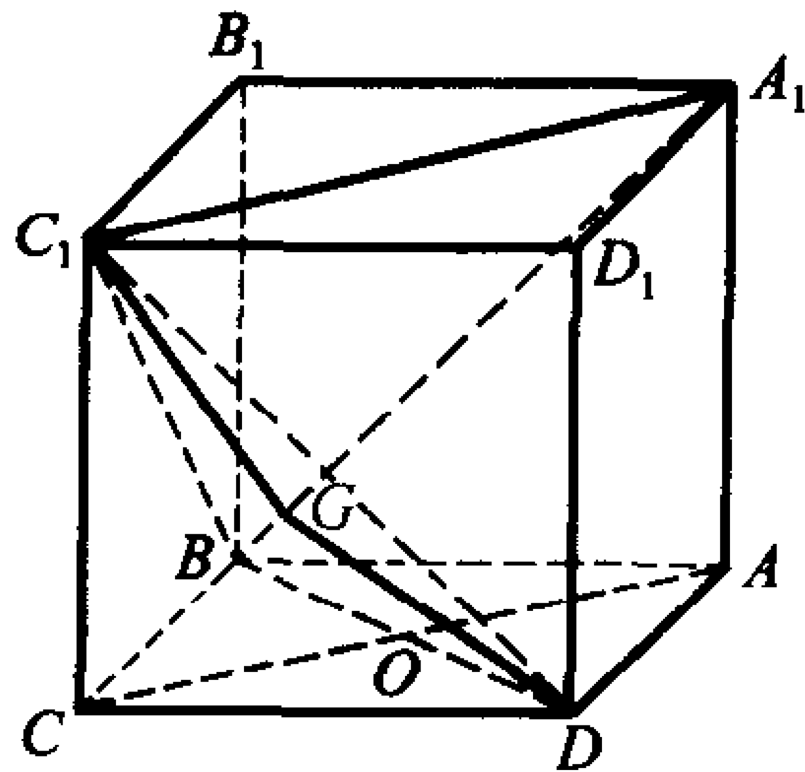


图 7-7

因为$\overrightarrow{A_1C}=\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=-(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CC_1})$，$\overrightarrow{C_1D}=\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CC_1}$，$\langle\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}\rangle=60°$，$\langle\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CC_1}\rangle=60°$，$|\overrightarrow{CD}|=|\overrightarrow{CB}|$，所以

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{C_1D}&=-(|\overrightarrow{CD}|^2-\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{CC_1}\cdot\overrightarrow{CD}-|\overrightarrow{CC_1}|^2)\\&=-(\lambda^2|\overrightarrow{CC_1}|^2+\frac{1}{2}\lambda^2|\overrightarrow{CC_1}|^2-\frac{1}{2}\lambda|\overrightarrow{CC_1}|^2-|\overrightarrow{CC_1}|^2)\\&=-\left(\frac{3}{2}\lambda^2-\frac{1}{2}\lambda-1\right)|\overrightarrow{CC_1}|^2.\end{aligned}$$

所以$\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{C_1D}=0\Leftrightarrow\frac{3}{2}\lambda^2-\frac{1}{2}\lambda-1=0\Leftrightarrow(\lambda-1)(3\lambda+2)=0$，而$\lambda>0$，从而$\lambda=1$. 可以验证当$\lambda=1$时，$\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{BD}=0$.

上述过程已证明，当$\frac{CD}{CC_1}=1$，能使$A_1C\perp$平面C_1BD.

如果上例改用综合法求解，则须添加一些辅助线.

(1) 连结A_1C_1，AC，设AC和BD交于O，连结C_1O，如图 7 - 7. 因四边形$ABCD$是菱形，且$\angle BCD=60°$，则$AC\perp BD$，$BD=CD$.

又$\angle BCC_1=\angle DCC_1$，$C_1C$公用，有$\triangle C_1BC\cong\triangle C_1DC$.

但$AC\perp BD$，$AC\cap C_1O=O$，从而$BD\perp$平面AC_1.

又$C_1C\subset$平面AC_1，故$C_1C\perp BD$.

(2) 当$\frac{CD}{CC_1}=1$时，能使$A_1C\perp$平面C_1BD.

事实上，由$\frac{CD}{CC_1}=1$，已知$BC=CD=C_1C$. 又$\angle BCD=\angle C_1CB=\angle C_1CD$，由此可推得$BD=C_1B=C_1D$. 从而知三棱锥$C-C_1BD$是正三棱锥.

设A_1C与C_1O相交于G，由$A_1C_1/\!/AC$，且$A_1C_1:OC=2:1$，则$C_1G:GO=2:1$.

得到C_1O是正三角形C_1BD的边BD上的高和中线，则点G是正三角形C_1BD的中心.

故$CG\perp$平面C_1BD，即$A_1C\perp$平面C_1BD.

从上述两种求解方法来看，各有各的特色，各有各的优点. 在此，我们还须指出：综合法是求解立体几何问题的一种基本方法. 有些问题采用向量法不简便时，还是采用综合法.

例如在上述例题条件下，又令$CD=2$，$CC_1=\frac{3}{2}$，记平面C_1BD为α，平面CBD为β，求二面角$\alpha-BD-\beta$的平面角的余弦值. 采用综合法就简便一些.

由(Ⅰ)知$AC\perp BD$，$C_1O\perp BD$，知$\angle C_1OC$是二面角$\alpha-BD-\beta$的平面角，在

$\triangle C_1BC$ 中，$BC=2$，$C_1C=\frac{3}{2}$，$\angle BCC_1=60°$，则

$$C_1B^2=2^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2-2\cdot 2\cdot \frac{3}{2}\cdot \cos 60°=\frac{13}{4}.$$

又$\angle OCB=30°$，则 $OB=\frac{1}{2}BC=1$.

于是 $C_1O^2=C_1B^2-OB^2=\frac{13}{4}-1=\frac{9}{4}$，从而 $C_1O=\frac{3}{2}$. 而 $C_1O=C_1C$.

作 $C_1H\perp OC$，垂足为 H，则点 H 是 OC 的中点，且 $OH=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

所以　$\cos\angle C_1OC=\frac{OH}{C_1O}=\frac{\sqrt{3}}{3}$为所求.

由于在位置关系中，线面的垂直和平行的研究占有重要地位，直线与直线、直线与平面、平面与平面互相垂直或平行的判定定理和性质定理的运用是学习的重点，也是学习的难点；在度量问题中，角和距离的计算是基础，面积、体积的计算是通过求有关的角和距离来得到的，立体几何中角和距离的计算也是难点. 因此，求解这两大难点的问题，往往要采用各种各样的方法，还常常添作一些辅助图，须运用综合的思路. 或者说，立体几何中很多问题的求解不可忽视运用综合法.

习　题　7.4

分别用综合法和向量法求解下述问题.

1. 正方形 $ABCD$ 所在平面与正方形 $ABEF$ 所在平面成 $60°$的二面角，求异面直线 AD 与 BF 所成角的大小(用余弦值表示).

2. 在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，若 $AB=\sqrt{2}BB_1$，求 AB_1 与 C_1B 所成角的度数.

第五节　立体几何的教学

高中学生对立体几何的学习普遍感到困难，究其原因既有学的原因，也有教的原因. 一方面是学生的实际感知及所具有的数学能力一时难于适应这种由平面到空间的突变；另一方面是一些教师在教学中忽视了理论联系实际这个教学基本原则，在教学中缺乏直观的空间模型演示和实验操作，以致不能使学生通过观察、分析和动手操作悟出立体几何问题的实质，或者有的教师只有教学意识，

缺乏教学管理意识，即只执行教学的过程，缺乏对自身教学效果的评价及教学过程的调控管理，教学方法及手段比较陈旧，教学以“空”（口讲笔画）对“空”（立体几何），难以激发学生的学习兴趣和调动其积极性.

根据这种情况，立体几何的教学应关注如下层面的教学工作：加强直观感知，进行操作确认；重视语言互译，立足基面识性；重视思维过程，加强教学设计；尽可能使用几何教育软件等.

1. 加强直观感知，进行操作确认，促进空间概念的建立

立体几何教材是在比较纯粹的状况下研究空间形式的关系，它将客观对象所具有的其他特征抛开，而抽象出其标准或理想形式进行研究，这就构成立体几何教学的难度. 但数学的抽象并不排斥具体性，恰恰相反，现实具体的素材是认识空间形式的基础，是过渡到抽象概念和命题必不可少的初始环节，是理性思维的初级阶段. 因此，在立体几何教学中，直观感知应摆在首要的位置. 应充分利用日常生活中的实例或制作直观模型或设计典型的空间模型实验，让学生直观地感受到立体几何问题抽象结论的实际背景，充分调动学生的感觉器官，形成丰富的直观感知. 并在此基础上，让学生亲自操作加以确认，促进学生空间概念的建立.

2. 重视语言互译，立足基面识性，加速空间观念的形成

立体几何中有文字语言、符号语言、图形语言，但它们间的互译是学生学习立体几何的一道高门槛. 数学内容是用数学语言表述的，数学语言也是数学思维的载体，立体几何的教学应特别重视三种数学语言及其互译的教学.

如果对三种语言的互译进行训练示范重视不够，甚至没有这方面的意识，则必将影响立体几何教学质量. 因此不仅要在立体几何的概念、公式、定理的教学中，着意培养学生这三种数学语言间的互译能力，而且在引导学生分析、解决立体几何问题的过程中，也要着意培养学生这三种数学语言间的互译能力.

例 1　对于直线 m、n 和平面 α、β，$\alpha\perp\beta$ 的一个充分条件是（　　）.

(A) $m\perp n$，$m/\!/\alpha$，$n/\!/\beta$

(B) $m\perp n$，$\alpha\cap\beta=m$，$n\subset\alpha$

(C) $m/\!/n$，$n\perp\beta$，$m\subset\alpha$

(D) $m/\!/n$，$m\perp\alpha$，$n\perp\beta$

分析　本题中涉及的基本线面关系都是用符号语言表述的，须作适当的语言翻译，弄清题意，才能作出正确的判断. 对于选择支(A)，翻译成文字语言是：两个平面分别平行于两条垂直的直线中的一条，则这两个平面垂直. 这显然是一个假命题. 对于选择支(B)，翻译成图形语言可以如图 7－8 所示. 由此即可作出判断：α 与 β 不一定垂直. 对于选择(C)，用符号语言推理是：$\left.\begin{matrix} m/\!/n \\ n\perp\beta \end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix} m\perp\beta \\ m\subset\alpha \end{matrix}\right\}\Rightarrow\alpha$

$\perp\beta$. 因而选(C). 为什么(D)是错误的呢? 对于选择支(D),用符号语言推理是:$\left.\begin{matrix} m /\!/ n \\ m\perp\alpha \end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix} n\perp\alpha \\ n\perp\beta \end{matrix}\right\}\Rightarrow\alpha /\!/ \beta$,这与 $\alpha\perp\beta$ 相悖.

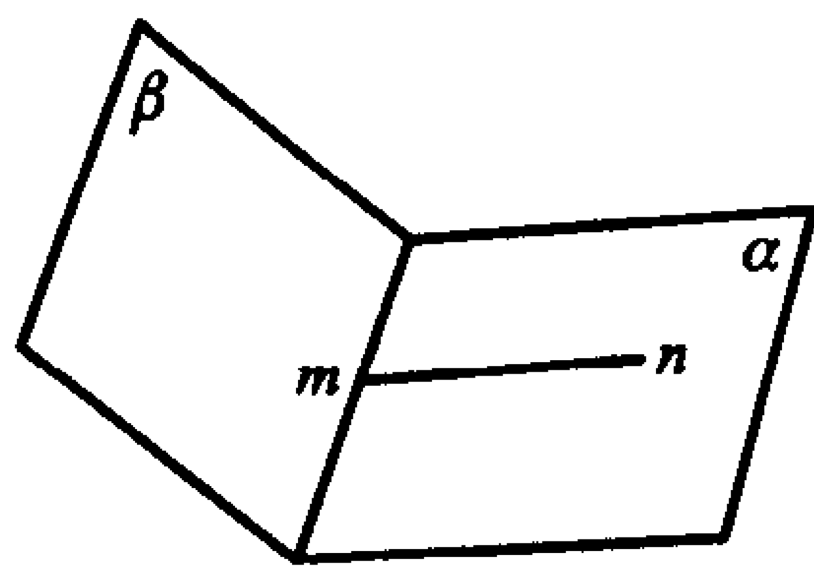


图 7-8

在处理立体几何问题中,选一个平面作为认识位置结构的基础,其他元素看作定义为这个平面的元素,如平面内的点,平面外的点;平面内的直线,平面的平行线;平面的垂线,平面的斜线等等. 这里,我们把为建立空间观念的这个平面,称为认识立体几何问题的基础平面,简称为基面. 这既是根据生活现实又遵循认识规律的一个立足点. 立体几何教材中的图形,多以水平面为基面,所以我们在认识立体几何问题和解决立体几何问题时,常以水平面为基面. 角与距离是立体几何讨论的重点,在解决这类问题时,常将立体几何问题化归为平面几何问题计算,由于基面中往往集中了充足的数据,在计算时,能够发挥基面的优势. 基面选好了,不仅有利于发掘各元素的功能,而且可把有利因素与问题需求集中到基面上解决.

注意到平面与垂线不可分离,如果说基面是解决问题的基础(也是认识问题和创设问题的基础),垂线中的主垂线像中柱一样起着主要作用——突破口、支柱(支撑着斜面、斜线,把斜面和斜线的信息传递到基面上来)枢纽. 立足基面识性,把握主线联想是学好立体几何的一种策略,也是加速空间观念形成的重要措施.

3. 重视知识形成的思维过程,加强教学设计

立体几何教学应关注思维过程的教学,特别是概念教学中,应关注概念形成的思维过程. 课本中反映概念的图形,通常以标准位置给出,由于标准图形的特殊性,容易导致学生机械的识记和思维的呆滞,教师应尽可能利用图形位置的变化和衬托背景的变换,反复变更概念的非本质属性,突出且保持概念的内涵特征,关注学生形成正确概念的思维过程. 比如,二面角的平面角可以在课本标准图的基础上出示一系列的变式图. 我们要在运动变化的思维过程中抽象出概念,从分析探索的思维过程中培养空间想像能力. 立体几何任一概念都处于一定的概念系统中,用收缩或扩大的动态思维启发学生建立概念的网络系统,可以防止易混概念的负迁移,突出相邻概念的联系与区别,深化各概念内涵与外延的认识.

科学的教学设计是关注思维过程教学的重要保证. 因而教学设计一定要遵循科学方法论的几个基本原理:一是要根据信息论有序性原理,由知识构成、层次的顺序编制教学目标. 违背教学目标的有序性,就会给教学带来极大的困难,导致教学失败. 学生空间想像能力的形成、非智力品质发展等内容均是由低级状态到高级状态进行有序发展的. 二是要根据控制论的反馈性原理,实现对教学的

控制. 数学教学是一种有目的的行为，教学目标是否达到，空间模型实验、多媒体的方法是否合理有序，都要通过获取信息予以评价. 通过反馈教学节奏和效果，增大学生在课堂活动的力度，发挥学生的主体作用，无疑会促进师生交流，达到数学目标. 三要根据系统论的整体性原理，组成合理的数学结构系统. 首先让立体几何教学成为一个开放的多级相互作用的子系统，再促进各子系统渗透、融合，最后形成合理的、完整的教学结构系统，实现教学的整体功能大于各子系统的功能之和. 例如，多面体和旋转体这部分内容公式多、计算多，推理论证少，如果认真研究教材，就可挖掘出教材中的思想体系，也会发现这一部分内容包含有丰富的数学内容和重要的数学思想方法. 通过特殊几何体概念、性质教学，逐步让学生掌握研究问题的方法；通过处理特殊几何体中有关计算问题的方法，如割截法处理旋转体的面积和体积，逐步让学生掌握化归、极限等思想方法.

例 2　关于球的体积公式的推证问题.

学生难以理解课本上怎么一下子提出了 $V_{半球}=\frac{2}{3}\pi R^3$，更难以理解为什么要用一底半径和高都是 R 的圆柱中间挖出一个倒置的圆锥来推证 $V_{半球}=\frac{2}{3}\pi R^3$.

针对这种情形，可以这样进行教学设计：

先投影(或挂出小黑板)，如图 7 - 9. 考察等底等高(底半径和高都是 R)的圆柱、圆锥与球的关系.

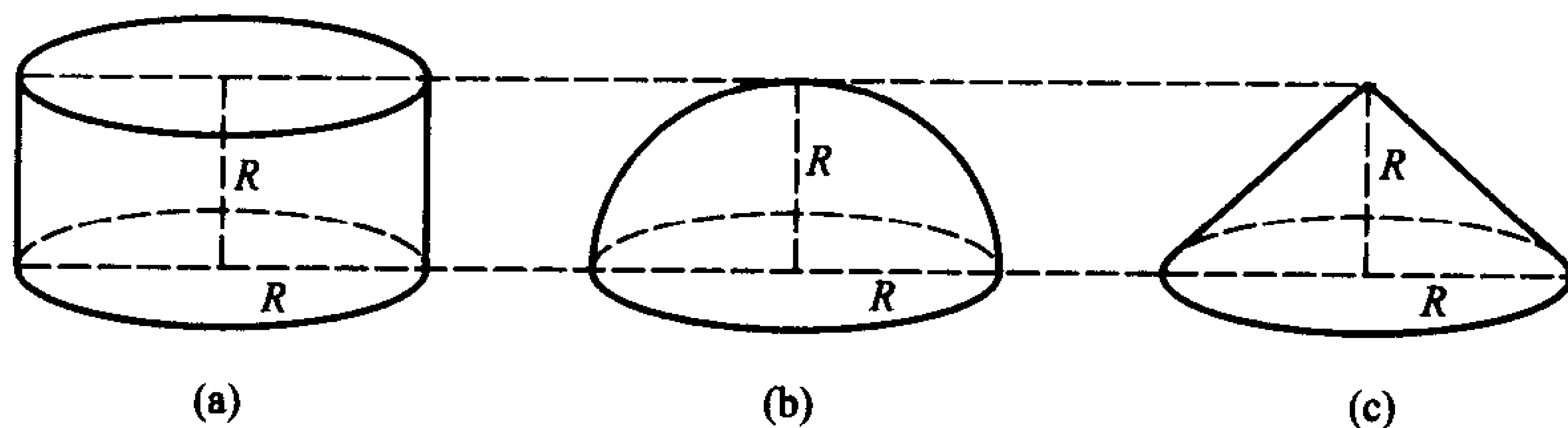


图 7 - 9

思考：上图中，$V_{圆柱}$、$V_{半球}$、$V_{圆锥}$ 的大小关系怎样?

学生得出：$V_{圆柱}>V_{半球}>V_{圆锥}$，即 $\frac{3}{3}\pi R^3>V_{半球}>\frac{1}{3}\pi R^3$.

猜想：$V_{半球}=?$　(激励)你期望 $V_{半球}=?$

学生猜到：$V_{半球}=\frac{2}{3}\pi R^3$.

启发：欲证 $V_{半球}=\frac{2}{3}\pi R^3$ 正确，依祖暅原理，关键是构造一个与半球等底等高的等积体. 考察半球截面有何特征? 这里的 $\frac{2}{3}\pi R^3$ 能否用圆柱和圆锥的体积

来表示？

由于 $S_{球截面}=\pi(R^2-L^2)=\pi R^2-\pi L^2(0\leqslant L\leqslant R)$.

变换角度可看成两个同心圆的面积差：

即　$S_{圆环}=\pi R^2-\pi L^2=S_{大圆}-S_{小圆}=S_{常量}-S_{变量}$.

确定常量：截面积为 πR^2(常量)的几何体为圆柱.

研究变量：截面积为 $\pi L^2(L:0\to R,S:\pi R^2\to 0)$的几何体为一个倒立的圆锥.

学生可联想：$\frac{2}{3}\pi R^3=\pi R^3-\frac{1}{3}\pi R^3$.

猜想：所需构造的等积体是与半球等高的圆柱中间挖去一个等底等高的倒置的圆锥.

引导学生证明，上述猜想的参照体满足与半球等底同高且等高的截面面积相等，这样利用祖暅原理，即可证明 $V_{半球}=\frac{2}{3}\pi R^3$，从而得到 $V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3$.

4. 尽量使用几何教育软件

在立体几何教学中，要尽可能发挥几何教育软件的作用.

习　题　7.5

1. 怎样培养空间想像能力，谈谈自己的想法.
2. 在立体几何概念教学中，要注意些什么？

第六节　求解立体几何问题的算法化表述

在求解立体几何问题时，经常发生某些学生在求解表述中省略关键步骤、跳步、图形与书写相脱离或书写混乱、条理不清等问题. 为了使学生在表述求解问题时更加有条理、规范，养成良好的思维品质，我们应引导学生运用最优化思想方法探讨表述的算法化环节. 最优化思想方法就是把整个系统分成不同的等级和层次，在系统运动中协调整体与局部的关系，使部分的功能和目标服从于系统总体的最佳目标，从而使系统达到最优状态. 在解题教学实践中，我们可以发现：证明题的算法化表述可以归结为一系列的三段论：大前提—小前提—结论的恰当组合；计算题的算法化表述可以归结为“寻—证—点—算”.“寻”，即由题意寻找或作出正确图形，根据需要作出辅助直线或平面. 有的题目中的辅助线面较多，还要写清成图过程、注明字母，或根据题意，在已给出的图中寻找所需要的图形.“证”，就是从题设条件出发，从已学公理、定理、定义出发论证清楚所求的“角”、“距离”等，这是解题的根据所在，重点所在，不能一笔带过.“点”就是在前面证明的基础上，点明所求的对象.“算”，就是根据题设条件及已论证清楚的结论，

计算出所要求的最后结果．一般来说，计算过程不要写得太长，突出主要过程即可．

证明题的例子见下一节．这里仅给出计算题的例子．

例1　如图7－10，过正方形 $ABCD$ 的顶点 A 作 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，设 $PA=AB=a$．

(1) 求二面角 $B-PC-D$ 的大小；(2) 求平面 PAB 和平面 PCD 所成二面角的大小．

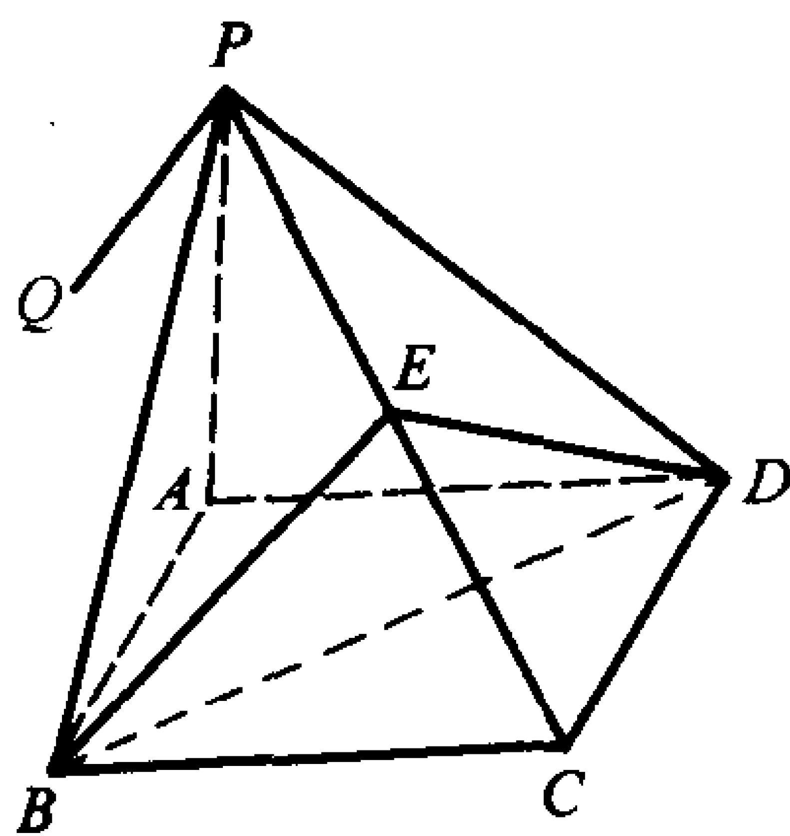


图7－10

解　(1)（寻）在平面 PBC 内，作 $BE\perp PC$ 于 E，连结 DE．

（证）由 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，$BD\perp AC$，根据三垂线定理知 $BD\perp PC$．于是 $PC\perp$ 面 BED，从而 $ED\perp PC$．

（点）故 $\angle BED$ 是二面角 $B-PC-D$ 的平面角．

（算）在 $\mathrm{Rt}\triangle PAB$ 中，由 $PA=AB=a$，得 $PB=\sqrt{2}a$．

由 $PA\perp$ 面 $ABCD$，$BC\perp AB$，知 $BC\perp PB$，故 $PC=\sqrt{PB^2+BC^2}=\sqrt{3}a$．

在 $\mathrm{Rt}\triangle PBC$ 中，$BE=\dfrac{PB\cdot BC}{PC}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$．

同理 $DE=\dfrac{\sqrt{6}}{3}a$．

在 $\triangle BDE$ 中，$\cos\angle BED=\dfrac{BE^2+DE^2-BD^2}{2BE\cdot DE}=-\dfrac{1}{2}$，即 $\angle BED=120^\circ$．此即为所求二面角 $B-PC-D$ 的大小．

(2)（寻）过 P 作 $PQ/\!/AB$．则 $PQ\subset$ 平面 PAB．由 $AB/\!/CD$，知 $PQ/\!/CD$，$PQ\subset$ 平面 PCD．故面 $PAB\cap$ 面 $PCD=PQ$．

（证）由 $PA\perp AB$，$AB/\!/PQ$，知 $PA\perp PQ$．

又 $PA\perp$ 面 $ABCD$，$CD\perp AD$，由三垂线定理之逆知 $CD\perp PD$．由 $PQ/\!/CD$，知 $PD\perp PQ$．

（点）从而 $\angle APD$ 是平面 PAB 和平面 PCD 所成二面角的平面角．

（算）由 $PA=AB=AD$，知 $\angle APD=45^\circ$．故所求的二面角为 45°．

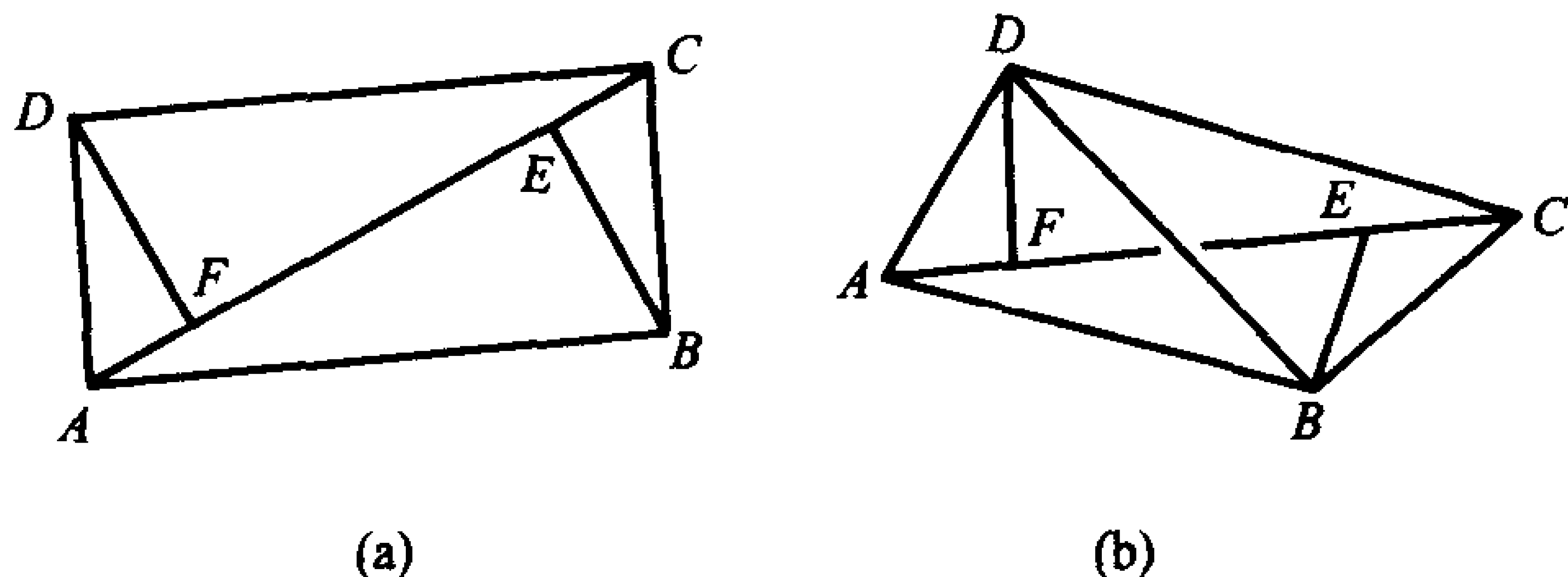
例2　如图7－11(a)，在长方形 $ABCD$ 中，$AB=a$，$BC=b(a>b)$，把这个长方形沿对角线 AC 折成等于 φ 的二面角．求这时顶点 B，D 间的距离．

解　（寻）作 $BE\perp AC$ 于 E，作 $DF\perp AC$ 于 F．

（证）由 $\triangle AEB\backsim\triangle ABC\backsim\triangle BEC$，

得 $\dfrac{BE}{AB}=\dfrac{BC}{AC}=\dfrac{CE}{BC}$，

从而 $BE=\dfrac{AB\cdot BC}{AC}=\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$CE=\dfrac{BC^2}{AC}=\dfrac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$．



(a) (b)

图 7-11

于是 $DF=BE=\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$EF=AC-2CE=\dfrac{a^2-b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

(点)在图 7-11(b)中，EF 是异面直线 BE，DF 的公垂线，BD 是两异面直线 BE 与 DF 上点 B，D 间的距离.

(算)设二面角 $D-AC-B$ 等于 φ，$0°<\varphi<180°$，知当 φ 为锐角时，φ 等于异面直线 BE，DF 所成的角，得

$$BD=\sqrt{EF^2+BE^2+DF^2-2BE\cdot DF\cdot\cos\varphi}=\sqrt{\frac{a^4+b^4-2a^2b^2\cdot\cos\varphi}{a^2+b^2}}.$$

当 φ 为钝角时，φ 的补角等于异面直线 BE，DF 所成的角，得

$$BD=\sqrt{\frac{a^4+b^4+2a^2b^2\cos(180°-\varphi)}{a^2+b^2}}=\sqrt{\frac{a^4+b^4-2a^2b^2\cos\varphi}{a^2+b^2}}.$$

当 φ 为直角时，$BD=\sqrt{\dfrac{a^4+b^4}{a^2+b^2}}$. 故 $BD=\sqrt{\dfrac{a^4+b^4-2a^2b^2\cos\varphi}{a^2+b^2}}$为所求.

习 题 7.6

1. 结合自己的感受，谈谈求解立体几何问题的算法化表述的几个环节是什么？

2. 根据本节中所介绍的算法化表述的四个环节表述一道问题的求解.

第七节 立体几何例题求解及点评

一、有关线、面关系的平行问题

例 1 如图 7-12，已知直三棱柱 $A_1B_1C_1-ABC$ 中，$B_1C_1=A_1C_1$，M、N 分别是 A_1B_1、AB 的中点，求证：平面 AMC_1 // 平面 NB_1C.

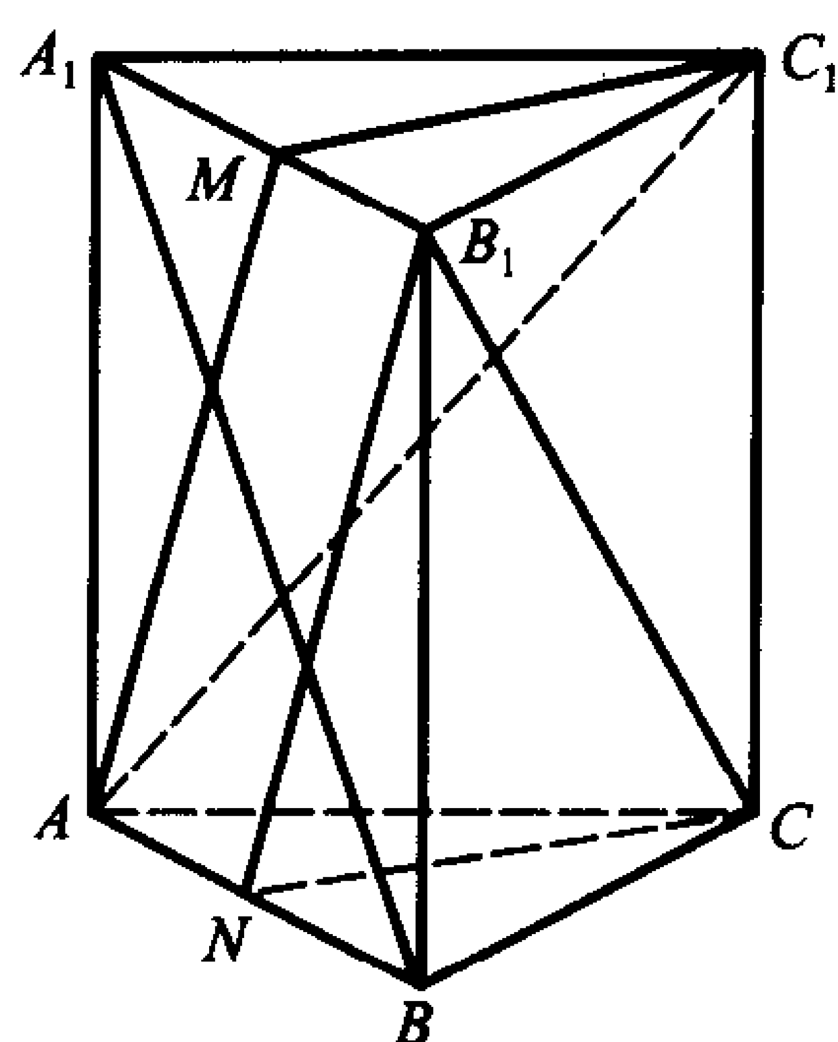


图 7-12

证法 1　在直三棱柱中，因为 M、N 分别是 A_1B_1，AB 的中点，且 $B_1C_1=A_1C_1$，所以 $C_1M\perp A_1B_1$，

又因为　平面 $A_1B_1C_1\perp$ 平面 A_1B_1BA，

所以　$C_1M\perp$ 平面 A_1B_1BA.

同理可得　$CN\perp$ 平面 A_1B_1BA，

所以　$C_1M/\!/CN$，

所以　$C_1M/\!/$ 平面 B_1NC.

又因为　$MB_1\underline{/\!/}AN$，

所以　MB_1NA 是平行四边形，

所以　$AM/\!/B_1N$，

所以　$AM/\!/$ 平面 B_1NC.

又　$AM\cap MC_1=M$，

所以　平面 $AMC_1/\!/$ 平面 B_1NC.

证法 2　已知直三棱柱 $A_1B_1C_1-ABC$，M、N 分别为等腰 $\triangle A_1B_1C_1$ 及等腰 $\triangle ABC$ 底边上的中点，所以　$C_1M\perp A_1B_1$，$CN\perp AB$，为此，可取 N 为原点，建立直角坐标系(如图 7-13).

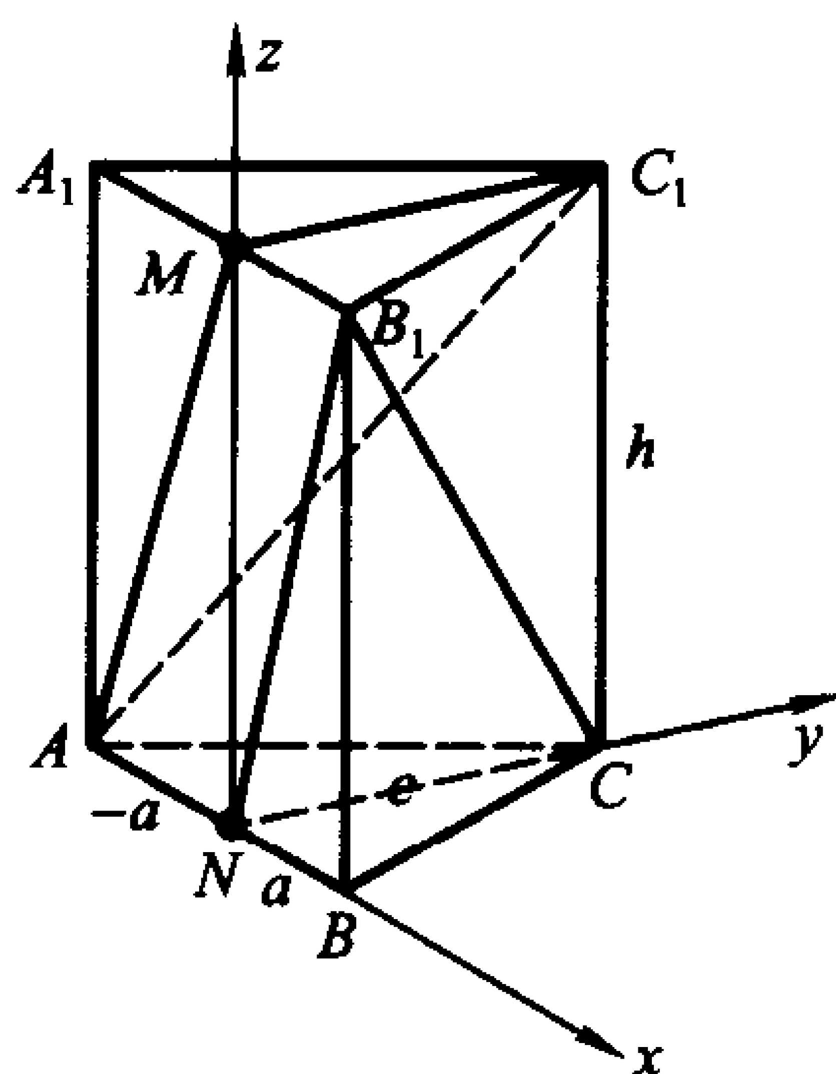


图 7-13

$N(0,0,0)$，$A(-a,0,0)$，$C(0,c,0)$，$B_1(a,0,h)$，$M(0,0,h)$，$C_1(0,c,h)$，$\overrightarrow{AM}=(a,0,h)$，$\overrightarrow{MC_1}=(0,c,0)$，$\vec{n}_1=\overrightarrow{AM}\times\overrightarrow{MC_1}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a & 0 & h \\ 0 & c & 0 \end{vmatrix}=(-ch,0,ac)$；

$\overrightarrow{NB_1}=(a,0,h)$，$\overrightarrow{B_1C}=(-a,c,-h)$，

$$\vec{n}_2=\overrightarrow{NB_1}\times\overrightarrow{B_1C}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ a & 0 & h \\ -a & c & -h \end{vmatrix}=(-ch,0,ac).$$

由于平面 AMC_1 的法向量 $\vec{n}_1$ 与平面 NB_1C 的法向量 $\vec{n}_2$ 对应坐标成比例，所以 $\vec{n}_1/\!/\vec{n}_2$，平面 $AMC_1/\!/$ 平面 NB_1C.

点评　证法 1 设法找出两条相交直线分别线线平行，从而推得面面平行，这需要有较强的推理能力及空间想像力；

证法 2 利用欲证两平面平行，转化为求证两平面的法向量平行，为此只要计算两向量的向量积即可，运算较为方便.

例 2　如图 7-14，已知正方形 $ABCD$ 所在平面与正方形 $ABEF$ 所在平面互相垂直，M、N 分别为对角线 AE 和 BD 上的点，且 $AM=DN$，求证：$MN/\!/$ 平

面 BEC.

证法 1　过 M、N 分别作 $MP // AB$，$NQ // AB$ 交 BE 于 P，BC 于 Q，连结 PQ.

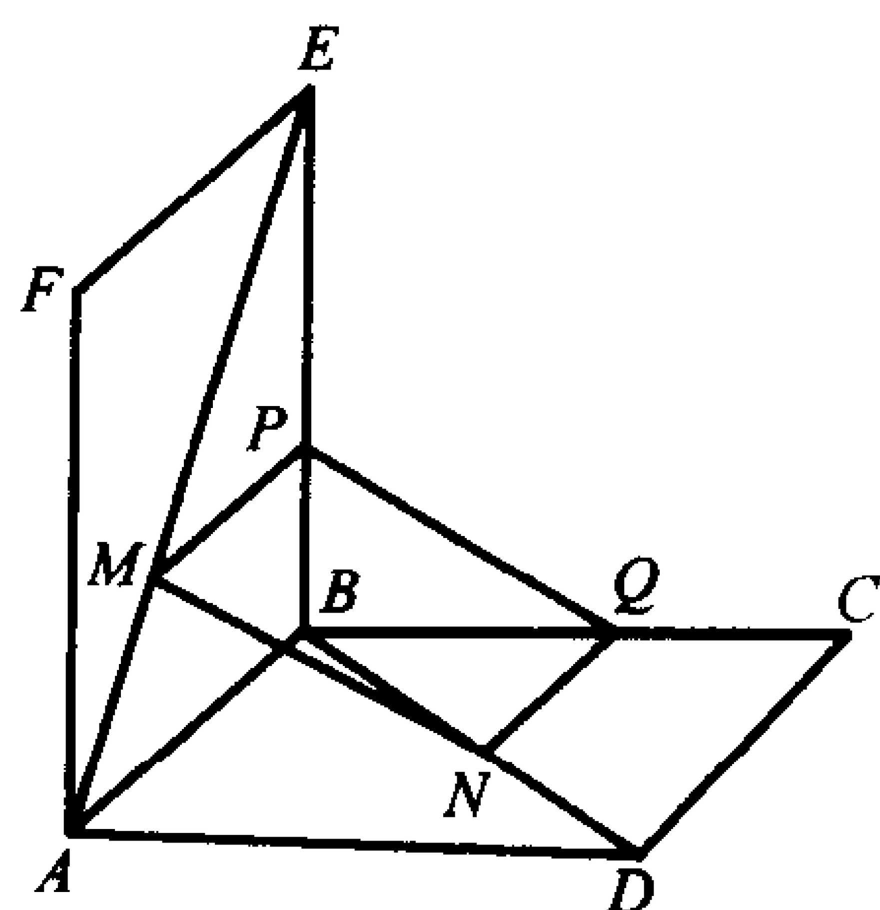


图 7-14

由 $\dfrac{MP}{AB}=\dfrac{ME}{AE}=\dfrac{AE-AM}{AE}=\dfrac{BD-DN}{BD}$

$=\dfrac{BN}{BD}=\dfrac{NQ}{DC}$，

故　$NQ=MP$.

显然　$MP // NQ$，

所以　$MNQP$ 是平行四边形，

所以　$MN // PQ$，

又　$MN \not\subset$ 平面 BEC，

$PQ \subset$ 平面 BEC，

所以　$MN //$ 平面 BEC.

证法 2　如图 7-15，建立直角坐标系. 过正方形 $ABCD$ 对角线上点 N，作 $NN_1 \perp BC$，$NN_2 \perp AB$. N_1、N_2 分别为其垂足(如图 7-16(a)).

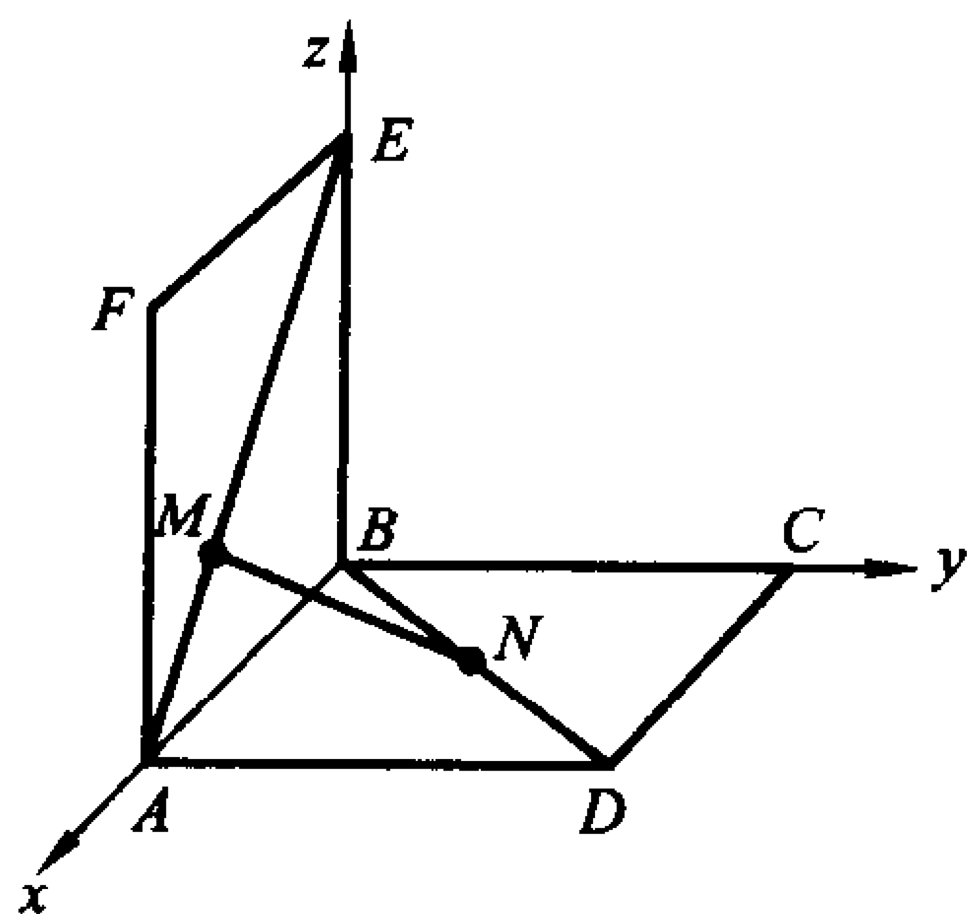


图 7-15

设 $NN_1=x$，$NN_2=y$，

由 $x=y$，所以 $N(x,x,0)$.

同理，过点 M 作 $MM_1 \perp BE$，$MM_2 \perp AB$，M_1、M_2 分别为其垂足(如图 7-16(b))，设 $MM_1=x$，$MM_2=z$，

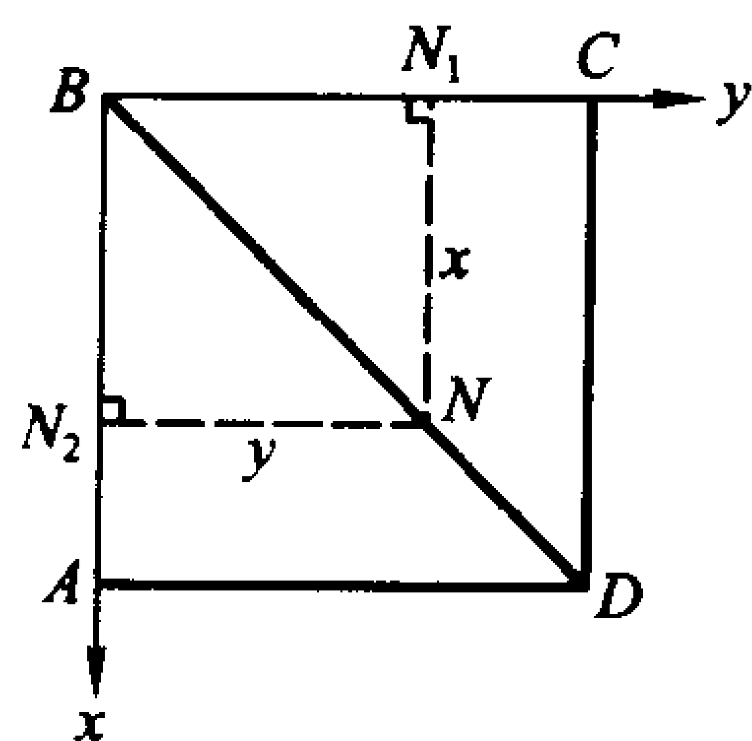
则　$z=a-x(AB=a)$，

所以　$M(x,0,a-x)$，

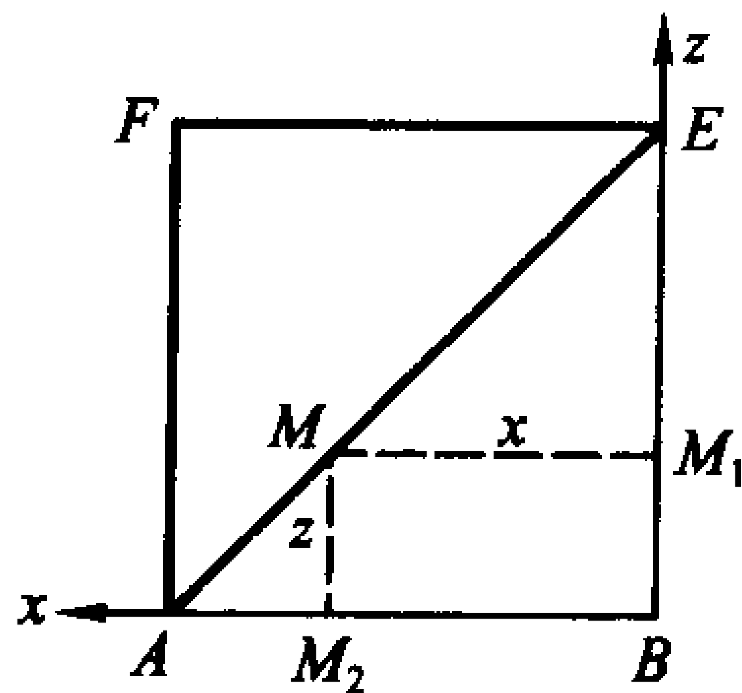
所以　$\overrightarrow{MN}=(0,x,x-a)$.

又设平面 yBz 的单位法向量 $\vec{n}_0=(1,0,0)$.

因为　$\overrightarrow{MN}\cdot\vec{n}_0=(0,x,x-a)\cdot(1,0,0)=0$，



(a)



(b)

图 7-16

所以　$\overrightarrow{MN}\perp\vec{n}_0$，即线段 $MN//$平面 CBE.

点评　在证法 1 中，通过推理，证得一个平行四边形，由线线平行，推得线面平行；在证法 2 中，为使欲求空间的点的坐标更直观，将空间问题平面化，如图 7-16，使在平面几何中考虑，可得点 M 及点 N 的坐标，从而得向量$\overrightarrow{MN}$的坐标表示. 欲求$\overrightarrow{MN}$与某个面平行，就转化为$\overrightarrow{MN}$与该平面的法向量垂直. 证法 1 需作辅助线，推理的技巧性也较强；而证法 2 回避作辅助线，且证题思路有规可循. 由于本题中点的具体坐标可以设而不求，因此降低了计算量.

二、有关线、面关系的垂直问题

例 3　如图 7-17，已知直三棱柱 $A_1B_1C_1-ABC$ 中，$A_1C_1=B_1C_1$，$AC_1\perp A_1B$，M、N 分别是 A_1B_1 和 AB 的中点.

求证：$A_1B\perp B_1C$.

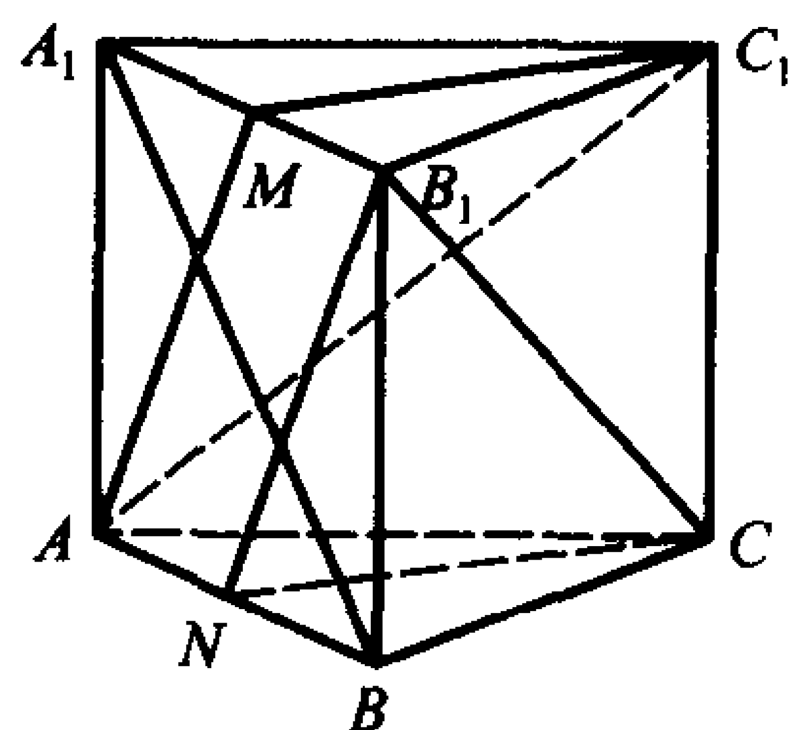


图 7-17

证法 1　在直三棱柱中

因为　M 为 A_1B_1 的中点，又已知 $A_1C_1=B_1C_1$，

所以　$C_1M\perp A_1B_1$.

又　平面 $A_1B_1C_1\perp$平面 ABB_1A_1，

所以　$C_1M\perp$平面 A_1B_1BA，

所以　AM 是 AC_1 在平面 A_1B_1BA 上的射影.

又因为　$A_1B\perp AC_1$（已知），

所以　$A_1B\perp AM$（三垂线定理）.

又因为　N 是 AB 的中点，

所以　AMB_1N 是平行四边形，$AM//B_1N$，

所以　$A_1B\perp B_1N$.

因为　$CN//C_1M$，

所以　$CN\perp$平面 A_1B_1BA，

所以　B_1N 是 B_1C 在平面 A_1B_1BA 上的射影，

所以　$A_1B\perp B_1C$（三垂线定理）.

证法 2　在直三棱柱中，如图 7-18，建立坐标系.

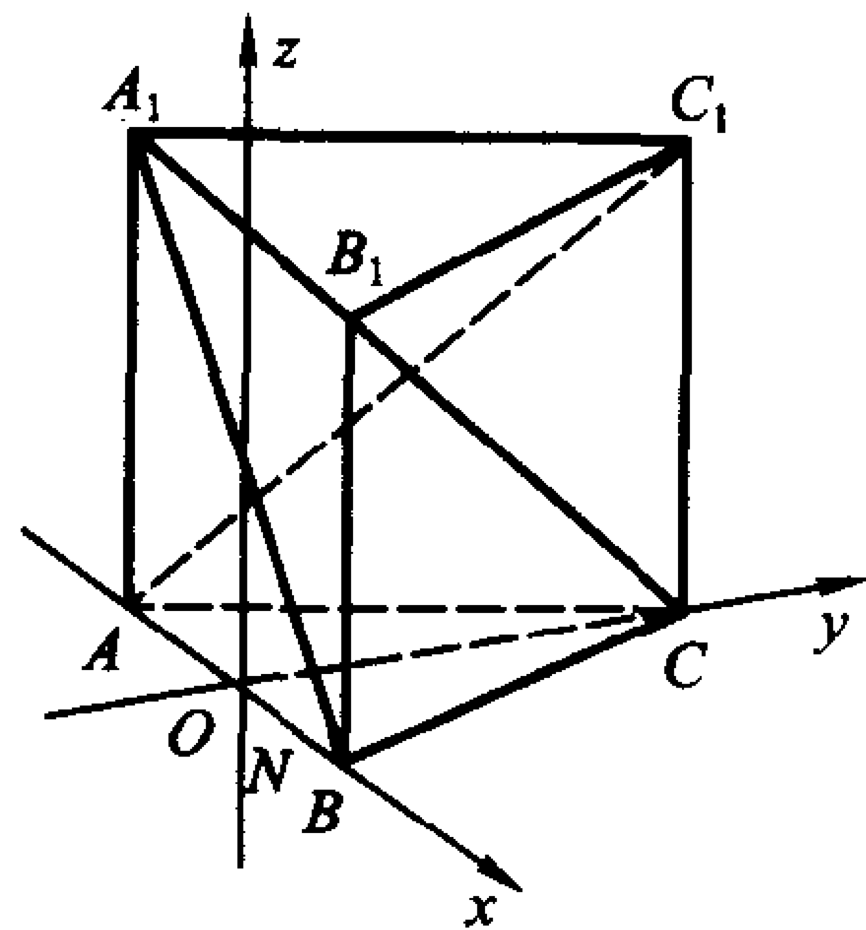


图 7-18

设 $A(-a,0,0)$，$B(a,0,0)$，$C(0,c,0)$，$A_1(-a,0,h)$，$B_1(a,0,h)$，$C_1(0,c,h)$.

$$\overrightarrow{A_1B}=(2a,0,-h),$$

$$\overrightarrow{AC_1}=(a,c,h),$$

$\overrightarrow{B_1C}=(-a,c,-h).$

因为 $A_1B\perp AC_1$(已知),

所以 $\overrightarrow{A_1B}\cdot\overrightarrow{AC_1}=0$,

即 $2a\times a+0\times c+(-h)\times h=0$,

即 $h^2=2a^2$,

所以 $\overrightarrow{A_1B}\cdot\overrightarrow{B_1C}=2a\times(-a)+0\times c+(-h)\times(-h)$

$=-2a^2+h^2=0$,

所以 $\overrightarrow{A_1B}\perp\overrightarrow{B_1C}$,

所以 $A_1B\perp B_1C$.

证法 3 设$\overrightarrow{AO}=\vec{a}$,则$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OB}=\vec{a}$,$\overrightarrow{AB}=2\vec{a}$,$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$,$\overrightarrow{AA_1}=\vec{b}$,则$\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{CC_1}=\vec{b}$,则 $\overrightarrow{AC_1}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CC_1}=\vec{a}+\vec{c}+\vec{b}$,$\overrightarrow{A_1B}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AA_1}=2\vec{a}-\vec{b}$.

因为 $AC_1\perp A_1B$(已知),

所以 $\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{A_1B}=0$,

即 $(\vec{a}+\vec{c}+\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b})=0$, (1)

由题意知 $\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=0$,

所以 (1)式可化为$\vec{b}^2=2\vec{a}^2$.

又 $\overrightarrow{BC}=\vec{c}-\vec{a}$,

$\overrightarrow{B_1C}=\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BB_1}=\vec{c}-\vec{a}-\vec{b}$,

所以 $\overrightarrow{A_1B}\cdot\overrightarrow{B_1C}=(2\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{c}-\vec{a}-\vec{b})$

$=-2\vec{a}^2+\vec{b}^2=0$,

所以 $\overrightarrow{A_1B}\perp\overrightarrow{B_1C}$,

即 $A_1B\perp B_1C$.

点评 证法 1 两次用到了三垂线定理:第 1 次是由已知条件满足三垂线定理,第 2 次是创造条件,构造三垂线定理,推理要求较高;

证法 2 是利用向量的坐标表示,再计算向量的数量积;证法 3 是直接利用向量的平行四边形运算法则,简化某些运算后再计算向量的数量积;二者实质相同,都是通性通法.

例 4 如图 7-19,已知直线 l 与平面 α 内的三条共点直线所成的角相等.求证:$l\perp\alpha$.

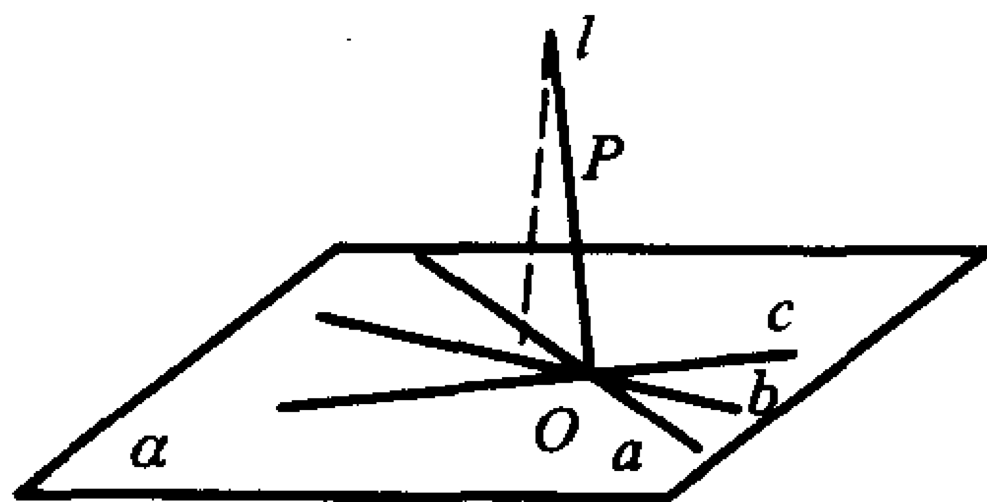


图 7-19

证法 1 设平面 α 内的三条共点直线为 a,b,c.它们交于点 O.因为 l 与 a,b 所成的角相等,

所以 l 上任一点 P 在 α 上的射影 Q 必在 a、b 所成的角或补角的平分线 m 上.

同理 P 在 α 上的射影 Q 也在 b、c 所成的角或补角的平分线 n 上，即 Q 是直线 m 与 n 的公共点，即 Q 与 O 重合. 从而 PQ 与 l 重合，又 $PQ\perp\alpha$，所以 $l\perp\alpha$.

证法 2　分别计算 $\vec{l}$ 与 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 的数量积. 由已知，得

$$\vec{l}\cdot\vec{a}=|\vec{l}|\cdot|\vec{a}|\cos\theta,$$

$$\vec{l}\cdot\vec{b}=|\vec{l}|\cdot|\vec{b}|\cos\theta,$$

$$\vec{l}\cdot\vec{c}=|\vec{l}|\cdot|\vec{c}|\cos\theta,$$

于是得　$\cos\theta=\dfrac{\vec{l}\cdot\vec{a}}{|\vec{l}|\cdot|\vec{a}|}=\dfrac{\vec{l}\cdot\vec{b}}{|\vec{l}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{\vec{l}\cdot\vec{c}}{|\vec{l}|\cdot|\vec{c}|}$，因为　$|\vec{l}|\neq 0$，

所以　$\dfrac{\vec{l}\cdot\vec{a}}{|\vec{a}|}=\dfrac{\vec{l}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}=\dfrac{\vec{l}\cdot\vec{c}}{|\vec{c}|}$，

设 $\vec{a}_0$、$\vec{b}_0$、$\vec{c}_0$ 分别表示 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$ 的单位向量，

于是　$\vec{l}\cdot\vec{a}_0=\vec{l}\cdot\vec{b}_0=\vec{l}\cdot\vec{c}_0$，　　(1)

由于　$\vec{c}_0=\lambda\vec{a}_0+\beta\vec{b}_0$，(其中 λ、β 为非零实数. 否则 $\vec{c}_0$ 与 $\vec{a}_0$ 或 $\vec{b}_0$ 共线)代入上式：

$$\begin{aligned}\vec{l}\cdot\vec{c}_0&=\vec{l}\cdot(\lambda\vec{a}_0+\beta\vec{b}_0)\\&=\lambda\vec{l}\cdot\vec{a}_0+\beta\vec{l}\cdot\vec{b}_0\\&=\lambda\vec{l}\cdot\vec{c}_0+\beta\vec{l}\cdot\vec{c}_0\\&=(\lambda+\beta)\vec{l}\cdot\vec{c}_0.\end{aligned}\qquad(2)$$

在(2)中，因为 $\lambda+\beta\neq 1$，所以 $\vec{l}\cdot\vec{c}_0=0$，所以 $\vec{l}\perp\vec{c}_0$.

同理可得　$\vec{l}\perp\vec{b}_0$，$\vec{l}\perp\vec{a}_0$.

命题得证.

点评　证法 1，由已知条件，自然想到取 l 上任一点，其射影必落在已知两直线交角的角平分线或其补角平分线上，再利用同一法，证得线面垂直，而掌握同一法，要求较高.

证法 2，由已知涉及等角问题，自然想到计算向量的数量积. 为计算方便，引入单位向量. 并利用了共面的三个向量，其中的任一个向量可用另两个向量线性表示. 证题思路清晰，有规可循.

三、有关各类的角及距离问题

例 5 如图 7 - 20，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，底面是等腰直角三角形，$\angle ACB=90°$，侧棱 $AA_1=2$，D、E 分别是 CC_1 与 A_1B 的中点，E 在平面 ABD 上的射影是 $\triangle ABD$ 的重心 G.

求 A_1B 与平面 ABD 所成角的大小.

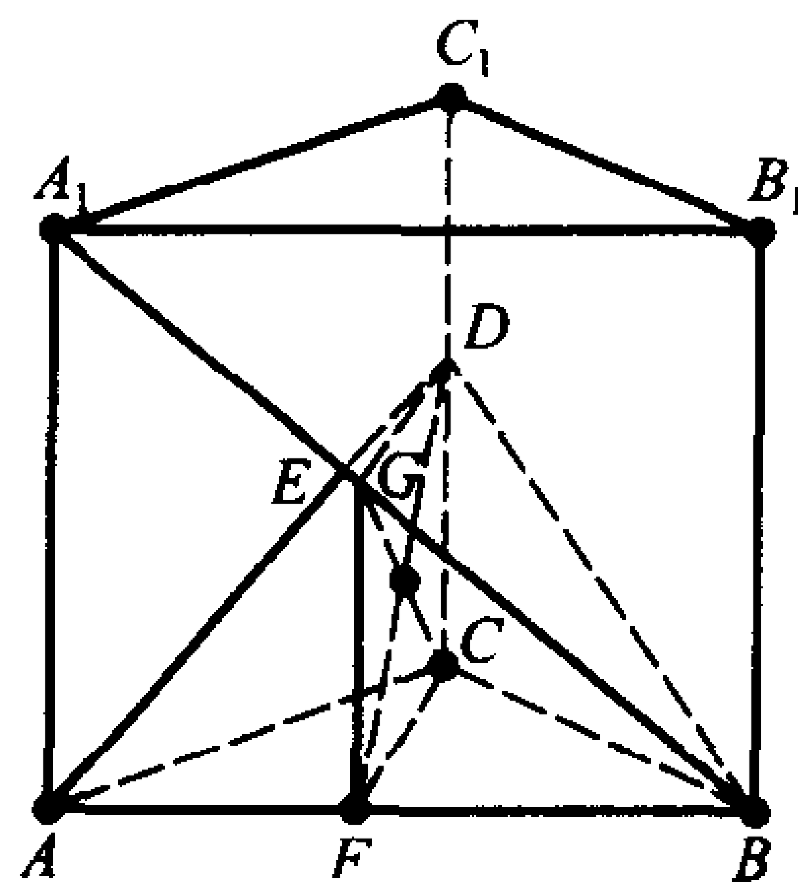


图 7 - 20

解法 1 连结 BG，则 BG 是 BE 在平面 ABD 上的射影，即 $\angle EBG$ 就是 A_1B 与平面 ABD 所成的角.

设 F 为 AB 的中点，连结 EF、FC，因为 D、E 分别是 CC_1、A_1B 的中点，又 $DC\perp$ 平面 ABC，

所以 $CDEF$ 是矩形，连结 GE，G 是 $\triangle ABD$ 的重心

因此 $G\in DF$. 在 $\mathrm{Rt}\triangle EFD$ 中，因为 $FG=\frac{1}{3}FD$，$EF^2=FG\cdot FD=\frac{1}{3}FD^2$，又 $EF=1$，

所以 $FD=\sqrt{3}$，于是 $ED=\sqrt{2}$，$EG=\frac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

因为 $FC=ED=\sqrt{2}$，所以 $AB=2\sqrt{2}$，$A_1B=2\sqrt{3}$，$EB=\sqrt{3}$. 所以 $\sin\angle EBG=\frac{EG}{EB}=\frac{\sqrt{6}}{3}\times\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$.

所以 A_1B 与平面 ABD 所成的角是 $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{3}$.

解法 2 如图 7 - 21，以 C 点为原点，分别以 CA、CB、CC_1 为 x 轴、y 轴、z 轴，建立坐标系，

仿解法 1，可得 $ED=\sqrt{2}=FC$.

由于 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，所以 $AC=BC=2$，

所以 $A(2,0,0)$，$B(0,2,0)$，$C(0,0,0)$，$A_1(2,0,2)$，

E 是 A_1B 的中点，故 $E(1,1,1)$，

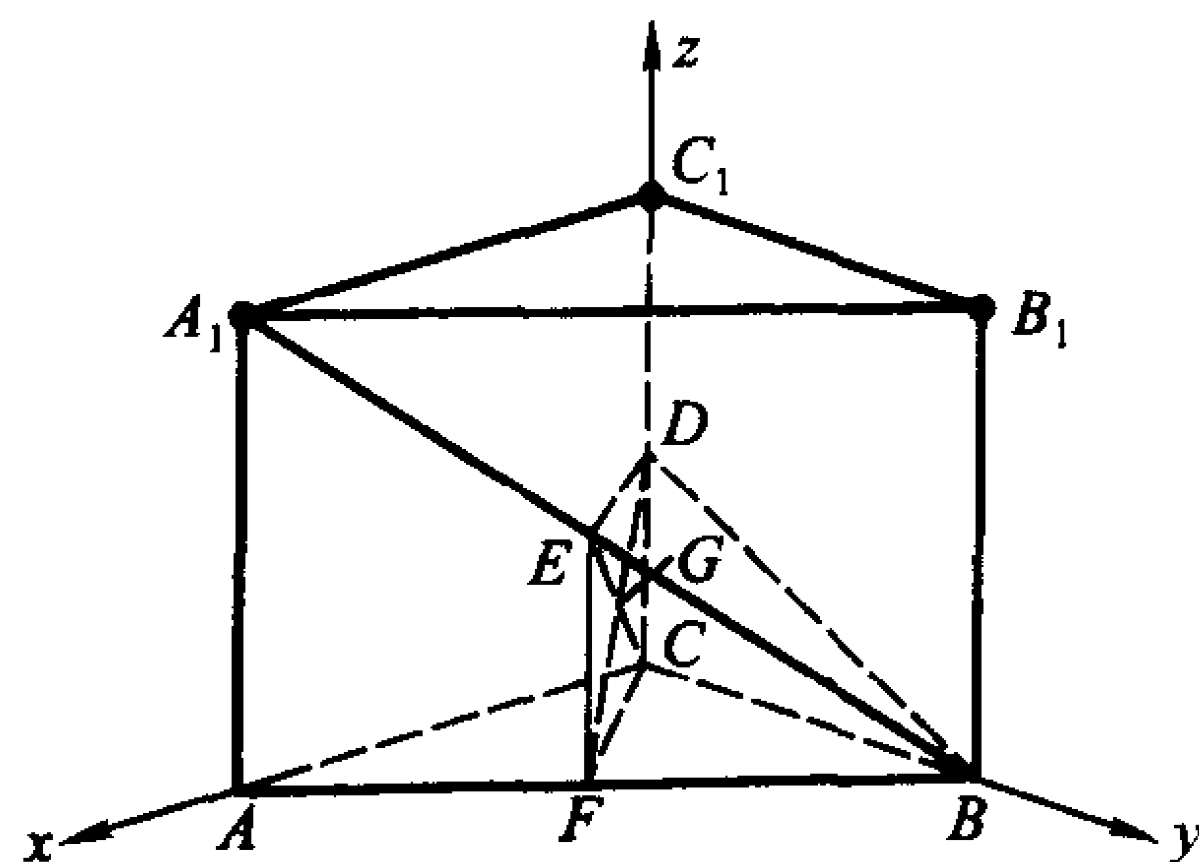


图 7 - 21

$F(1,1,0),D(0,0,1),G\left(\frac{x_A+x_B+x_D}{3},\frac{y_A+y_B+y_D}{3},\frac{z_A+z_B+z_D}{3}\right)$,

即　$G\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$.

$\overrightarrow{GE}=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right),|\overrightarrow{GE}|=\frac{1}{3}\sqrt{6}$,

$\overrightarrow{A_1B}(-2,2,-2),|\overrightarrow{A_1B}|=2\sqrt{3}$,

$\overrightarrow{GE}\cdot\overrightarrow{A_1B}=\frac{1}{3}\times(-2)+\frac{1}{3}\times2+\frac{2}{3}\times(-2)=-\frac{4}{3}$,

所以$\overrightarrow{GE}$与$\overrightarrow{A_1B}$所成的角θ的余弦为

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{GE}\cdot\overrightarrow{A_1B}}{|\overrightarrow{GE}|\cdot|\overrightarrow{A_1B}|}=-\frac{\sqrt{2}}{3}.$$

由于GE是平面ABD的法线，

所以$\overrightarrow{A_1B}$与$\overrightarrow{GE}$所成的角的余弦的绝对值就是A_1B与平面ABD所成角的正弦值.

因A_1B与平面ABD所成的角的正弦为$\frac{\sqrt{2}}{3}$，即A_1B与平面ABD所成的角的大小为$\arcsin\frac{\sqrt{2}}{3}$.

点评　在解法1中，为了求线面角，首先要构造角，然后有的放矢，利用已知条件，求出有关线段的长，再利用三角函数，求出所需的角.

在解法2中，利用向量的数量积，即可求出线面角. 由于避免了线面角的构造，必然会对空间想像力的要求有所下降；但是另一方面，对合理的选择建立坐标系，从而确定点的坐标以及结合平面几何知识，并对计算等当然都有一定要求.

例6　如图7-22，在棱长为a的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，E、F分别是AB与BC的中点.

(1) 求二面角$B-FB_1-E$的大小；

(2) 求点D到平面B_1EF的距离；

(3) 在棱DD_1上是否存在一点M，使$BM\perp$平面EFB_1？若能，试确定点M的位置，否则请说明理由.

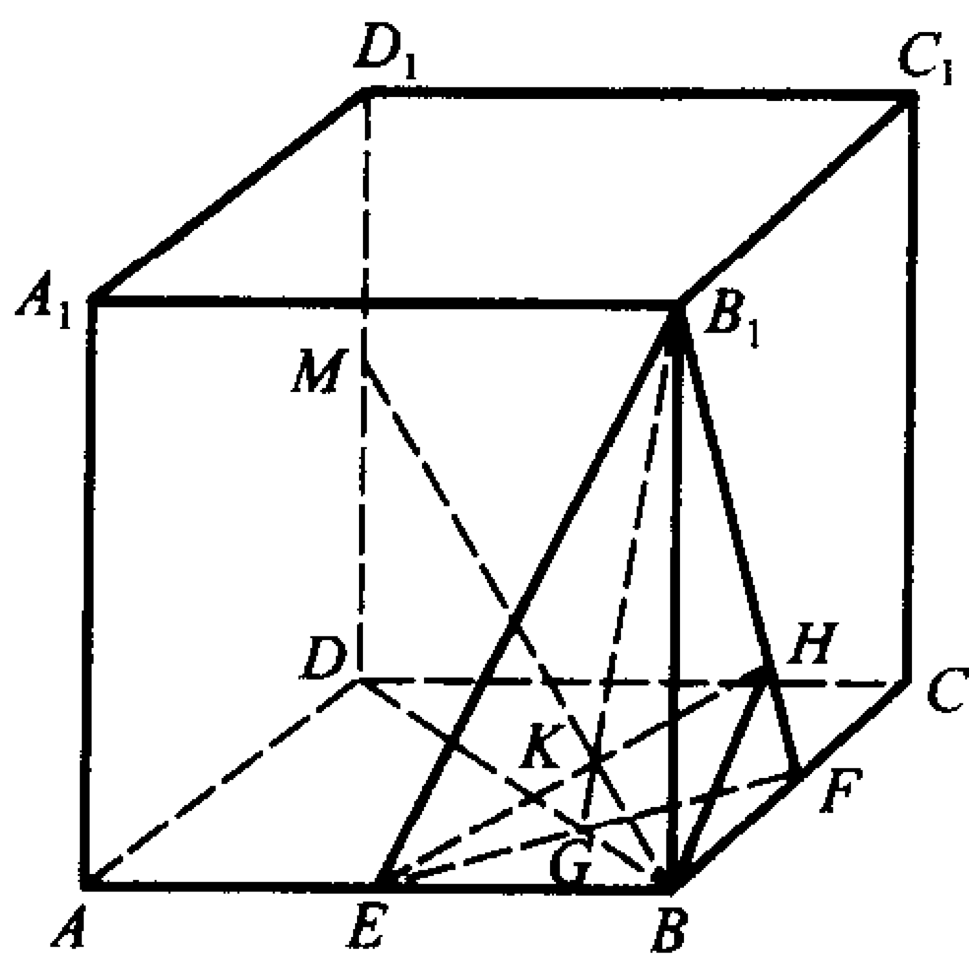


图7-22

解法 1 作 $BH\perp B_1F$ 于 H，连结 EH，由正方体的性质知 $EB\perp$ 平面 BC_1，

(1) 由三垂线定理知 $EH\perp B_1F$，

从而 $\angle EHB$ 就是二面角 $B-B_1F-E$ 的平面角.

在 $\mathrm{Rt}\triangle B_1BF$ 中，易得 $BH=\dfrac{BF\times BB_1}{B_1F}=\dfrac{a}{\sqrt{5}}$

$\tan\angle EHB=\dfrac{EB}{BH}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

所以 $\angle EHB=\arctan\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，

即二面角 $B-B_1F-E$ 的大小为 $\arctan\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

(2) 因为 $B_1E=B_1F=DE=DF$，EF 为公共边，所以 $\triangle DEF\cong\triangle B_1EF$，$S_{\triangle DEF}=S_{\triangle B_1EF}$.

设 D 到平面 B_1EF 的距离为 h，

由 $V_{B_1-DEF}=V_{D-B_1EF}$. 得

$\dfrac{1}{3}S_{\triangle DEF}\times BB_1=\dfrac{1}{3}S_{\triangle B_1EF}\times h$，

得 $h=BB_1=a$，

故 D 到平面 B_1EF 的距离为 a.

(3) 设 EF 与 BD 交于 G，连结 B_1G.

因为 $EF\perp BD$，$EF\perp BB_1$，所以 $EF\perp$ 平面 BB_1D_1D，于是平面 $B_1EF\perp$ 平面 BB_1D_1D，而 B_1G 即为该两平面垂直相交的交线，于是可以在平面 BB_1D_1D 内作 $BK\perp B_1G$ 于 K，延长后交 DD_1 于 M. 因为在一个平面内作两平面垂直相交的交线的垂线，该垂线必垂直于另一个平面，即据两平面垂直的性质定理知，$BM\perp$ 平面 B_1EF，即在 DD_1 上存在适合条件的点 M.

在平面 B_1D_1DB 中，由 $MB\perp B_1G$，所以 $\triangle B_1BG\backsim\triangle BDM$，所以

$$\frac{BB_1}{BG}=\frac{BD}{DM}.$$

又 $BG=\dfrac{\sqrt{2}}{4}a$，$BD=\sqrt{2}a$，$BB_1=a$，

故 $DM=\dfrac{1}{2}a$，即 M 为 DD_1 的中点.

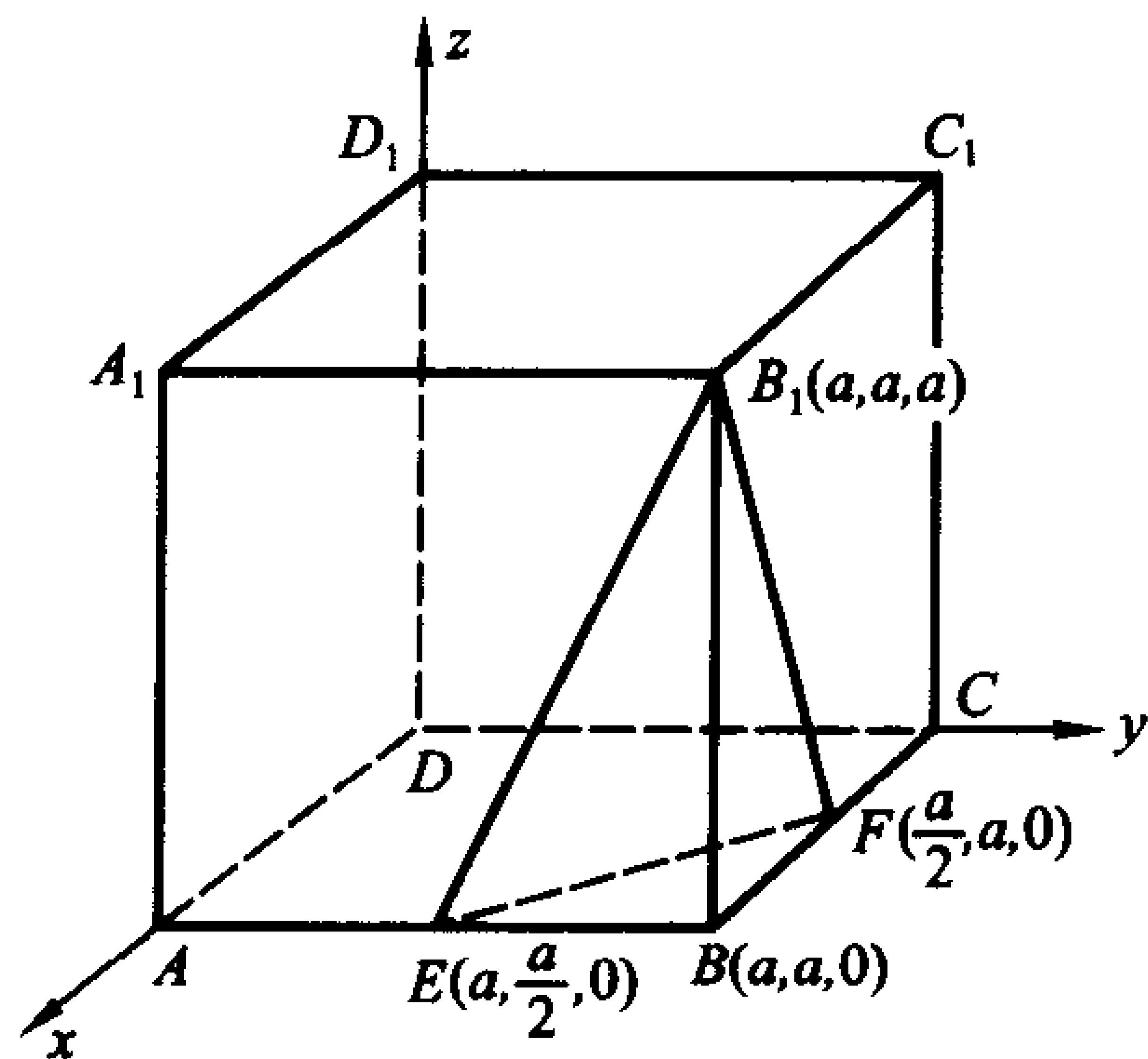


图 7-23

解法 2 建立直角坐标系(如图 7-23)，

(1) $\overrightarrow{B_1F}=\left(-\frac{a}{2},0,-a\right),\overrightarrow{FE}=\left(\frac{a}{2},-\frac{a}{2},0\right),\overrightarrow{BF}=\left(-\frac{a}{2},0,0\right)$.

设平面 EB_1F 的法向量为 $\vec{n}_1$，则

$$\vec{n}_1=\overrightarrow{B_1F}\times\overrightarrow{FE}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -\frac{a}{2} & 0 & -a \\ \frac{a}{2} & \frac{-a}{2} & 0 \end{vmatrix};$$

$$=\left(-\frac{a^2}{2},-\frac{a^2}{2},\frac{a^2}{4}\right);$$

设平面 BB_1F 的法向量为 $\vec{n}_2$，则

$$\vec{n}_2=\overrightarrow{B_1F}\times\overrightarrow{BF}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -\frac{a}{2} & 0 & -a \\ -\frac{a}{2} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\left(0,\frac{a^2}{2},0\right).$$

$$\cos\theta=\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}=\frac{-\frac{1}{4}}{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2}}=\frac{-\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}}=-\frac{2}{3}.$$

所以　$\theta=\pi-\alpha=\pi-\arccos\frac{2}{3}$，即 $\theta=\arctan\frac{\sqrt{5}}{2}$，

此即二面角 $B-FB_1-E$ 的平面角.

(2) 求点 D 到平面 B_1EF 的距离. 在此，不妨再次推导距离公式.

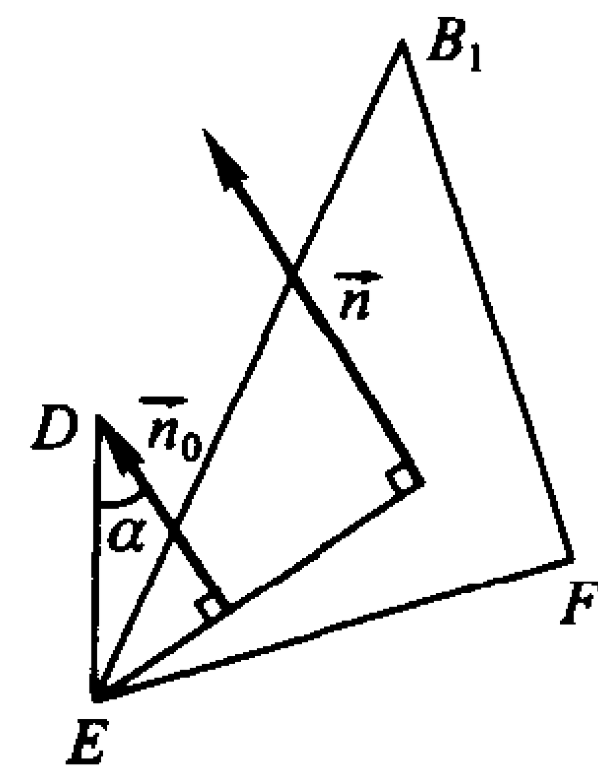


图 7-24

设平面 B_1EF 的法向量为 $\vec{n}$，其单位法向量为 $\vec{n}_0$，

$\overrightarrow{DE}\cdot\vec{n}_0=|\overrightarrow{DE}|\cdot|\vec{n}_0|\cdot\cos(\pi-\alpha)=-|\overrightarrow{DE}|\cdot\cos\alpha=-d$，即 d 为 $\overrightarrow{DE}$ 在单位向量 $\vec{n}_0$ 上的射影. 其次，据(1)，平面 B_1EF 的法向量 $\vec{n}=\left(-\frac{a^2}{2},-\frac{a^2}{2},\frac{a^2}{4}\right)$，其单位向量

$$\vec{n}_0=\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$$

$$=\frac{1}{a^2\left(\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2}\right)}\left(a^2\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)\right)$$

$=\left(-\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$,

而$\overrightarrow{DE}=\left(a,\frac{a}{2},0\right)$;

所以 $-d=\overrightarrow{DE}\cdot\vec{n}_0=\left(a,\frac{a}{2},0\right)\cdot\left(-\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)=-\frac{2a}{3}-\frac{a}{3}=-a.$

所以,$d=a$,此即点 D 到平面 B_1EF 的距离.

求平面 B_1EF 的单位法向量 $\vec{n}_0$ 的另解:

设垂直于平面 B_1EF 的单位法向量 $\vec{n}_0=(x,y,z)$,

$$\overrightarrow{EF}=\left(-\frac{a}{2},\frac{a}{2},0\right),$$

$$\overrightarrow{B_1F}=\left(-\frac{a}{2},0,-a\right),$$

因为 $\vec{n}_0\perp\overrightarrow{EF}$,所以 $\vec{n}_0\cdot\overrightarrow{EF}=0\Rightarrow\frac{-ax}{2}+\frac{ay}{2}=0$, (1)

因为 $\vec{n}_0\perp\overrightarrow{B_1F}$,所以 $\vec{n}_0\cdot\overrightarrow{B_1F}=0\Rightarrow\frac{ax}{2}+az=0$, (2)

又 $|\vec{n}_0|^2=x^2+y^2+z^2=1$ (3)

由(1)、(2)、(3)式解得$\begin{cases}x=\frac{2}{3},\\ y=\frac{2}{3},\\ z=-\frac{1}{3}.\end{cases}$ 或$\begin{cases}x=-\frac{2}{3},\\ y=-\frac{2}{3},\\ z=\frac{1}{3}.\end{cases}$

不妨取$\begin{cases}x=-\frac{2}{3},\\ y=-\frac{2}{3},\\ z=\frac{1}{3}.\end{cases}$

所以得 $\vec{n}_0=\left(-\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$.

这里,两次利用数量积的定义,取代了利用行列式,同样能得出平面的法向量.

(3) 假设点 M 存在,$M\in DD_1$,

设 $M(0,0,z)$,

$B(a,a,0)$,

$\overrightarrow{BM}=(-a,-a,z)$,

$\overrightarrow{B_1E}=\left(0,-\frac{a}{2},-a\right)$,

因为设$\overrightarrow{BM}\perp$平面 B_1EF,

所以　$\overrightarrow{BM}\perp\overrightarrow{B_1E},\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{B_1E}=0\Rightarrow\frac{a^2}{2}-az=0$

$$\Rightarrow z=\frac{a}{2}.$$

所以　$M\left(0,0,\frac{a}{2}\right)$.

即点 M 为棱 DD_1 的中点.

点评　(1) 由证法 1,在构造二面角的平面角时,往往少不了使用三垂线定理;由证法 2,计算二面角所成的角,可以转向为计算二平面的法向量所成的角,为此避免了二面角的平面角的构造. 在本小题中,向量法的优越性已充分体现;

(2) 由证法 1,计算点到平面的距离,这里巧妙利用了等积变换,使欲求的距离化繁为简;由证法 2,直接使用向量的距离公式,同样有规可循. 可见解题的两种方法虽然各异,但各有巧妙不同. 在求平面的法向量时,可有两种不同的方法选择,或使用两次数量积,或使用行列式,都可异途同归;

(3) 第 3 小题为开放题. 在证法 1 中使用了由线、面垂直转化为面、面垂直,再寻找两垂直平面的交线,然后再要寻找两三角形相似的条件,推理的技巧性较强;在证法 2 中,直接使用数量积的定义,逆求点的坐标,使该点定位;这里,通过代数计算,使空间想像及推理论证的要求大幅降低.

例 7　已知 $ABCD$ 是边长为 4 的正方形,E、F 分别是 AB、AD 的中点,GC 垂直于平面 $ABCD$,且 $GC=2$. 如图 7-25,求点 B 到平面 EFG 的距离.

解法 1　如图 7-25,连结 EG、FG、EF、BD、AC,设 EF、BD 分别交 AC 于 HO.

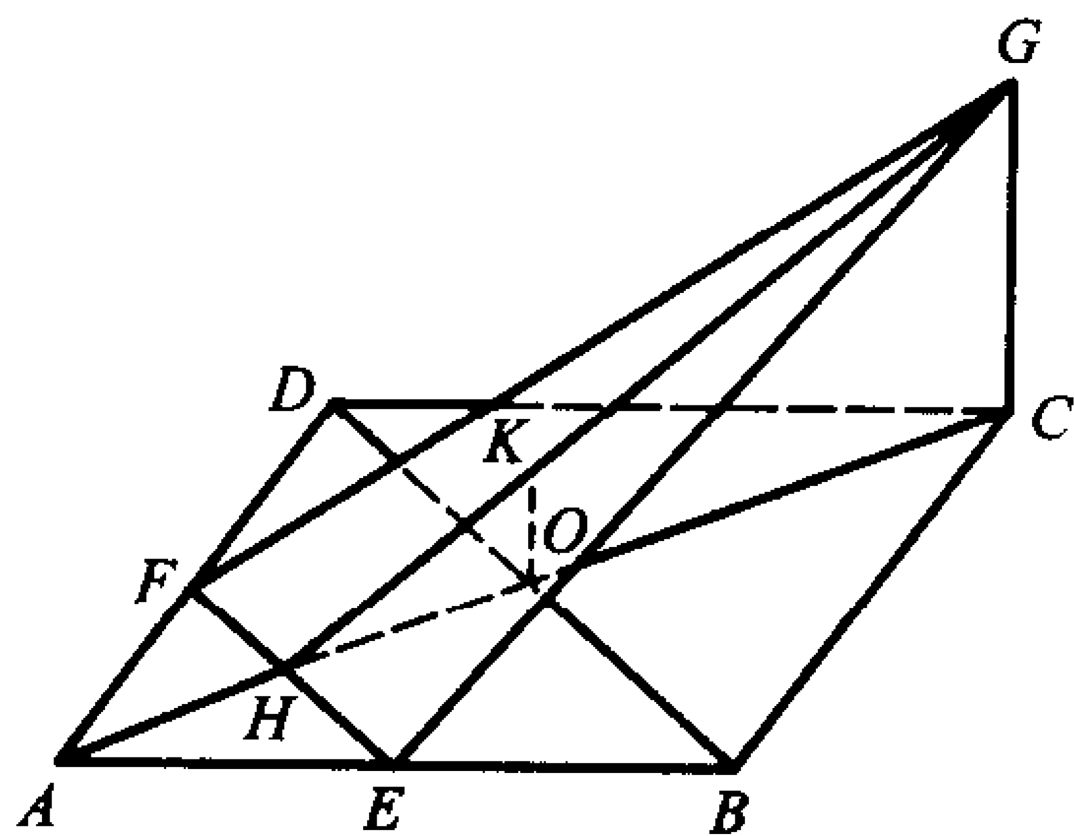


图 7-25

因为 $ABCD$ 为正方形,E、F 为 AB、CD 中点,所以 $EF\parallel BD$,H 为 AO 的中点.

由线面平行判定定理知 $BD\parallel$平面 EFG.

所以　BD 和平面 EFG 的距离就是点 B 到平面 EFG 的距离.

因为　$BD\perp AC$,所以　$EF\perp HC$.

因为　$GC\perp$平面 $ABCD$,所以 $EF\perp GC$.

所以　$EF\perp$平面 HCG,

所以　平面 $EFG\perp$平面 HCG,HG 是交线.

在平面 HGC 上过点 O 作 $OK\perp HG$ 交 HG 于 K,则 $OK\perp$平面 EFG. 由于

BD 上的任何一点到平面 EFG 的距离都等于点 B 到平面 EFG 的距离，所以线段 OK 的长就是点 B 到平面 EFG 的距离.

因为正方形 $ABCD$ 边长为 4，$GC=2$，

$AC=4\sqrt{2}$，$HO=\sqrt{2}$，$HC=3\sqrt{2}$.

所以 Rt$\triangle HGC$ 中，$HG=\sqrt{(3\sqrt{2})^2+2^2}=\sqrt{22}$.

因为 Rt$\triangle HKO\backsim$Rt$\triangle HCG$，

所以 $OK=\dfrac{HO\cdot GC}{HG}=\dfrac{\sqrt{2}\times 2}{\sqrt{22}}=\dfrac{2\sqrt{11}}{11}$，

即点 B 到平面 EFG 的距离为$\dfrac{2\sqrt{11}}{11}$.

解法 2 如图 7-26，连结 BF、BE、BG、AC，并且 AC 与 EF 交 AC 于 H，连结 GH，易知

$S_{\triangle BEF}=\dfrac{1}{8}S_{\square ABCD}=2$，

$V_{G\text{-}BEF}=\dfrac{1}{3}S_{\triangle BEF}\cdot GC=\dfrac{1}{3}\times 2\times 2=\dfrac{4}{3}$.

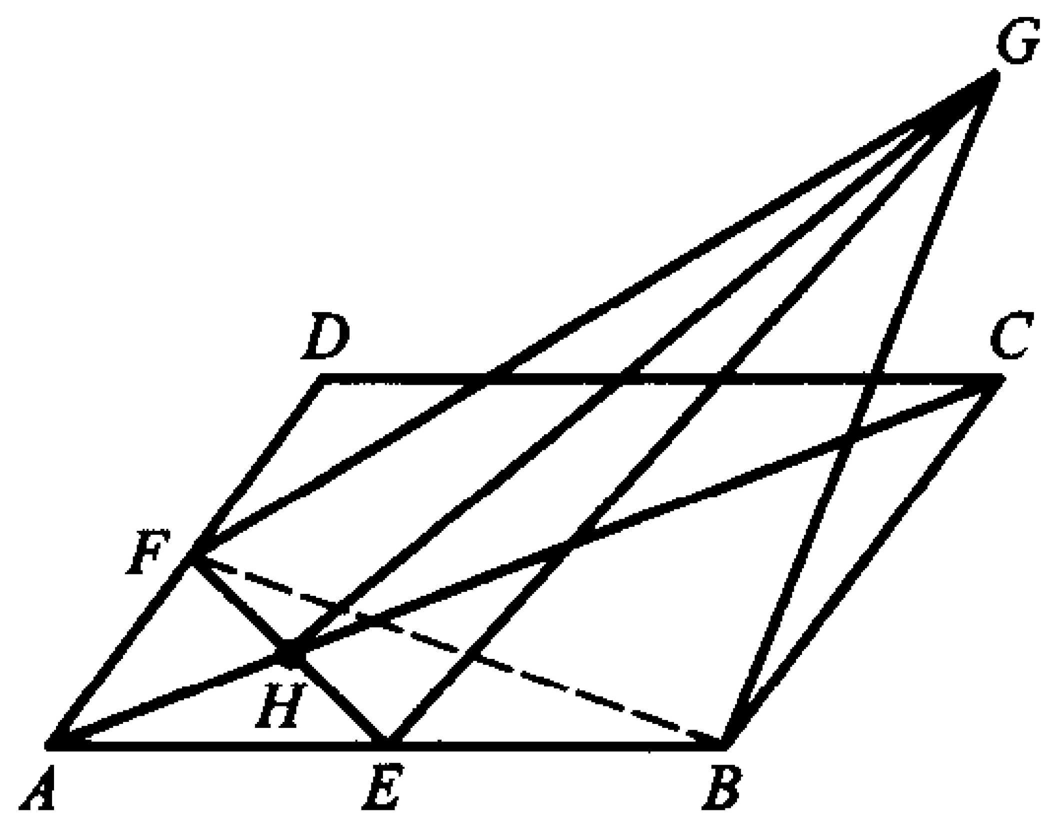


图 7-26

因为 $EF=2\sqrt{2}$，$HG=\sqrt{22}$（如解法 1），

所以 $S_{\triangle EFG}=\dfrac{1}{2}\times 2\sqrt{2}\times\sqrt{22}=2\sqrt{11}$.

设 B 点到平面 EFG 的距离为 h，则

$V_{B\text{-}EFG}=\dfrac{1}{3}h\cdot S_{\triangle EFG}$，而 $V_{B\text{-}EFG}=V_{G\text{-}BEF}$.

所以 $\dfrac{1}{3}\times 2\sqrt{11}\times h=\dfrac{4}{3}$，$h=\dfrac{2}{11}\sqrt{11}$，

即点 B 到平面 EFG 的距离为$\dfrac{2}{11}\sqrt{11}$.

解法 3 如图 7-27，以 CD、CB、CG 所在直线为 x，y，z 轴建立坐标系易证 $BD\parallel$平面 GEF，故 B 到平面 EFG 的距离等于 BD 与 AC 的交点 O 到平面 EFG 的距离. 过 O 作 $OM\perp HG$ 于 M，由解法 1 可证 $OM\perp$ 平面 EFG，则 OM 即为所求.

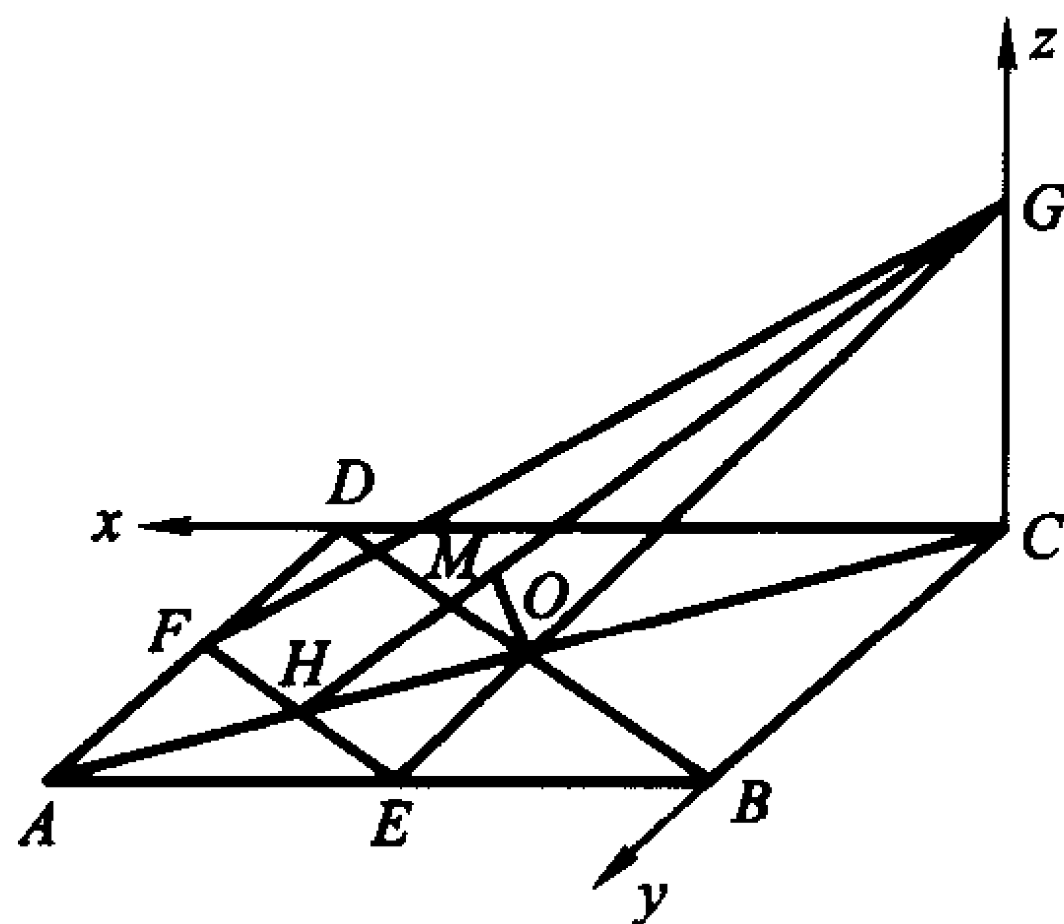


图 7-27

易得 $H(3,3,0)$，$G(0,0,2)$，$O(2,2,0)$，$\overrightarrow{GH}=(3,3,-2)$.

设$\overrightarrow{GM}=\lambda\overrightarrow{GH}$ $(0<\lambda<1)$，

则$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{GM}-\overrightarrow{GO}=\lambda(3,3,-2)-(2,2,-2)=(3\lambda-2,3\lambda-2,-2\lambda+2)$.

又$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{GH}=0$,

所以 $3(3\lambda-2)+3(3\lambda-2)-2(2-2\lambda)=0$,

解得 $\lambda=\frac{8}{11}$,

所以 $\overrightarrow{OM}=\left(\frac{2}{11},\frac{2}{11},\frac{6}{11}\right)$,

所以 $|\overrightarrow{OM}|=\frac{2\sqrt{11}}{11}$,

即 B 到平面 GEF 的距离为$\frac{2\sqrt{11}}{11}$.

解法 4 如图 7-28,建立直角坐标系,

$F(4,2,0),E(2,4,0),G(0,0,2)$,

$\overrightarrow{GF}=(4,2,-2),\overrightarrow{GE}=(2,4,-2)$,

设平面 GEF 的法向量为 $\vec{n}$.

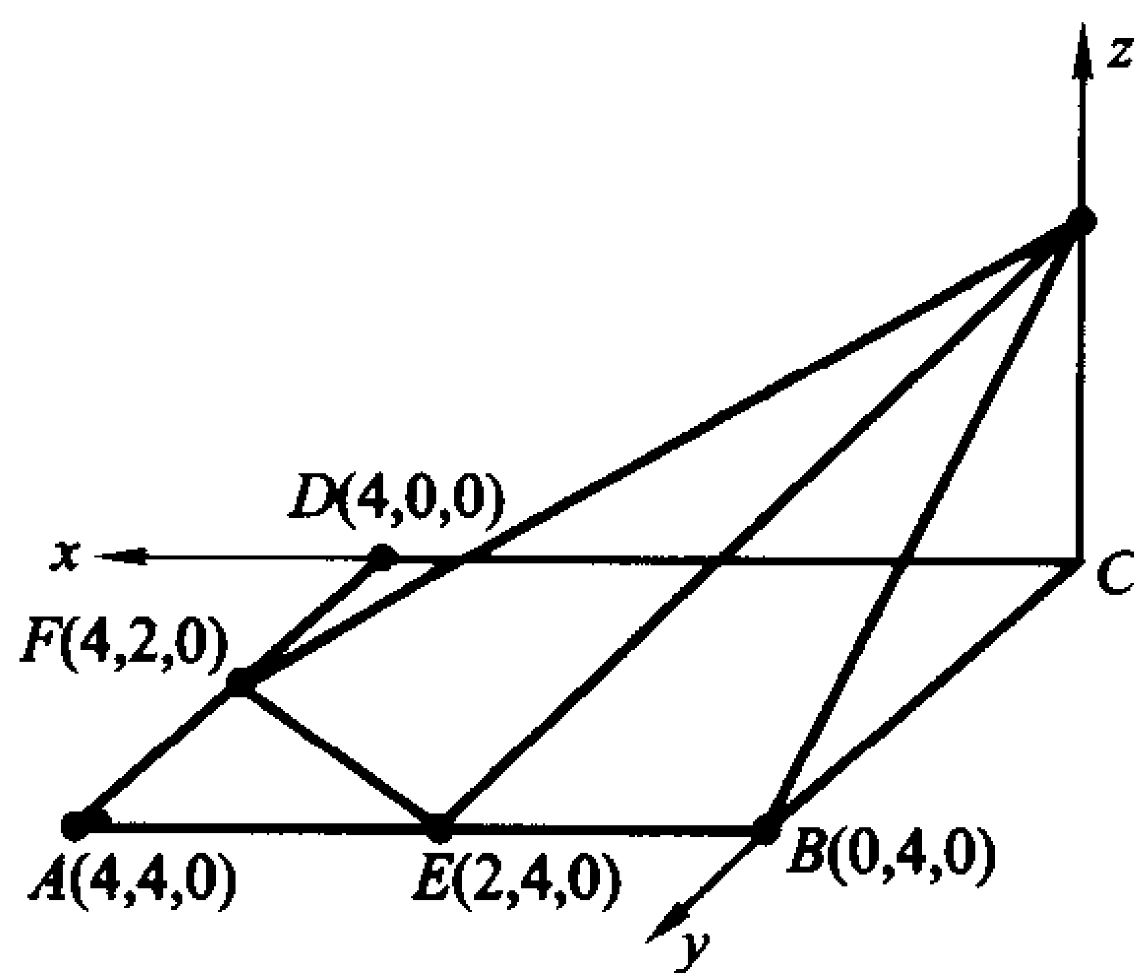


图 7-28

$$\vec{n}=\overrightarrow{GF}\times\overrightarrow{GE}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 4 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

$$=(4,4,12)=4(1,1,3).$$

则单位法向量 $\vec{n}_0$ 为

$$\vec{n}_0=\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}=\frac{4(1,1,3)}{\sqrt{4^2+4^2+12^2}}=\frac{(1,1,3)}{\sqrt{11}}=\left(\frac{1}{\sqrt{11}},\frac{1}{\sqrt{11}},\frac{3}{\sqrt{11}}\right).$$

又因为$\overrightarrow{BG}=(0,-4,2)$,

据距离的计算公式:(见例 6)

$$d=\overrightarrow{BG}\cdot\vec{n}_0=(0,-4,2)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{11}},\frac{1}{\sqrt{11}},\frac{3}{\sqrt{11}}\right)$$

$$=\frac{-4}{\sqrt{11}}+\frac{6}{\sqrt{11}}=\frac{2}{\sqrt{11}}.$$

此即点 B 到平面 GEF 的距离.

点评 本例包括两部分:距离的定位及计算.定位困难而计算简单.

在解法 1 中，经过点线、线面、面面关系的多次转化，最后才有距离的定位浮出水面.

在解法 2 中，利用等积变换，回避定位，同样算出距离，这说明也不是事事机械地都硬要一刀切的使用向量法.

在解法 3 中，在距离已经定位的情况下，不过使用了向量法，算出了这个距离. 因此，意义不大.

在解法 4 中，使用了向量的距离公式，是通性通法，一劳永逸，因此具有普遍意义.

四、有关“补图”“折图”问题

例 8 如图 7－29，已知平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 是菱形，且 $\angle C_1CB=\angle C_1CD=\angle BCD=60°$. 当 $\dfrac{CD}{CC_1}$ 的值为多少时，能使 $A_1C\perp$ 平面 C_1BD？请给出证明.

证明 沿面 AA_1D_1D 补一个全等的平行六面体，如图 7－29，则 $A_1C\parallel DN$，若设 $A_1C\perp$ 平面 C_1BD，则 $DN\perp$ 平面 C_1BD. 所以 $C_1D\perp DN$，$BD\perp DN$.

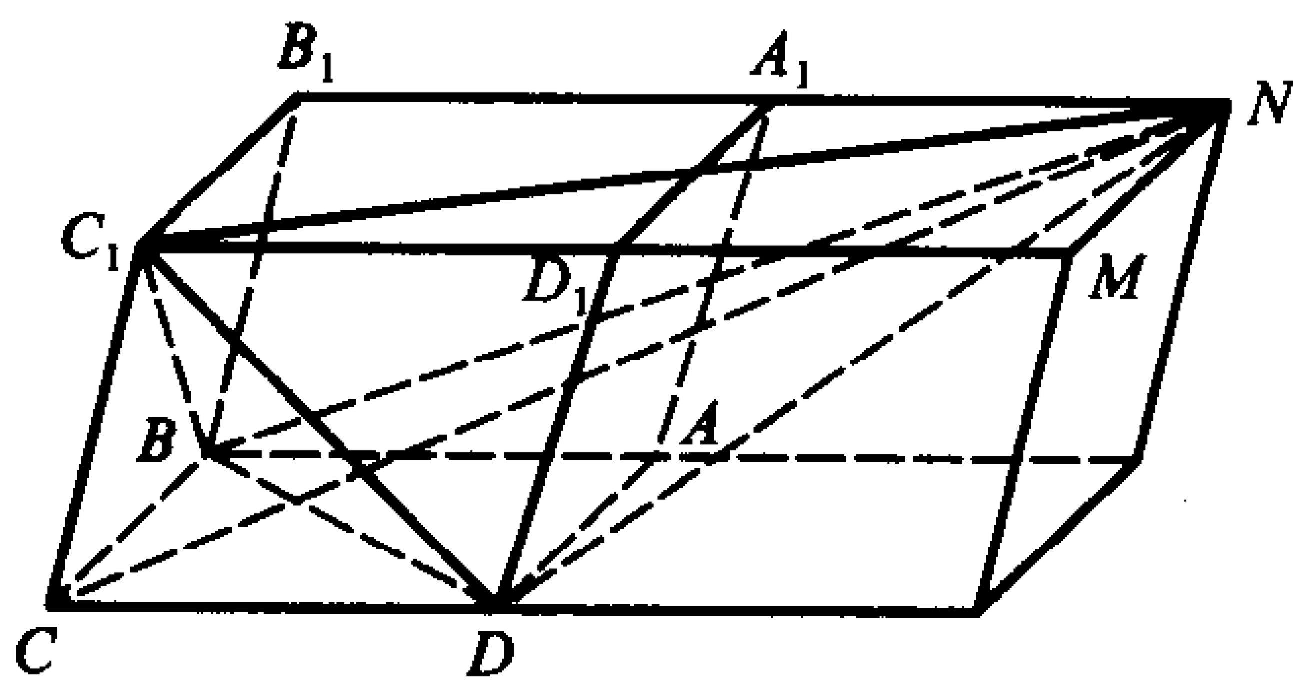


图 7－29

不妨令 $CD=k$，$CC_1=1$，在 $\triangle C_1CD$ 中，由余弦定理知：$C_1D^2=k^2-k+1$. 在 $\triangle C_1NB_1$ 中，由余弦定理知：$C_1N^2=7k^2$，$BN^2=4k^2+2k+1$.

因为 $BD=CD$，所以 $BD^2=k^2$.

因为 $\begin{cases} C_1N^2=C_1D^2+DN^2, & (1)\\ BN^2=DN^2+BD^2, & (2)\end{cases}$

由(1)，(2)式，则 $C_1N^2-C_1D^2=BN^2-BD^2$，

即 $7k^2-(k^2-k+1)=4k^2+2k+1-k^2$，

所以 $3k^2-k-2=0$，$k=1$ 或 $k=-\dfrac{2}{3}$(舍去)

由于以上推理每步可逆，

由此可见当 $\dfrac{CD}{CC_1}=1$ 时，$A_1C\perp$ 平面 C_1BD.

点评 本题中已知众多的线面垂直关系，但线及面淹没在众多线条中，图欠直观，不易觉察，现将原图进行补图，等于把原图中的体对角线平移“拉出”到“补图”中，这样，线、面垂直关系就由“隐”转“显”了.

由于本题为一般平行六面体，而不为直平行六面体，因此建立直角坐标系较为麻烦. 为此，在此情况下，一般都少用向量法，可见，向量法也有其局限之一面.

我们知道，1986 年上海市高考数学压轴题就是一道立体几何“折图”题. 该题是这样的：

“已知直角三角形 ABC 的两直角边 $AC=2$，$BC=3$，P 为斜边 AB 上的一点(如图 7 - 30). 现沿 CP 将此直角三角形折成直二面角 $A-CP-B$，当 $AB=\sqrt{7}$ 时，求二面角 $P-AC-B$ 的大小(如图 7 - 31).”

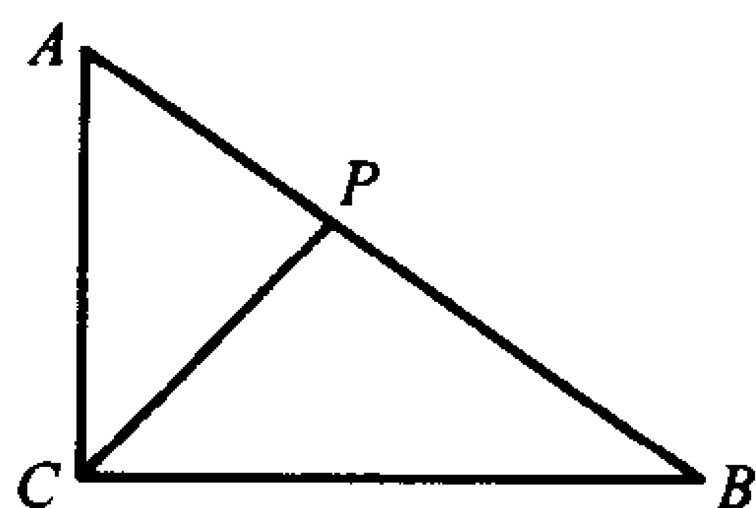


图 7 - 30

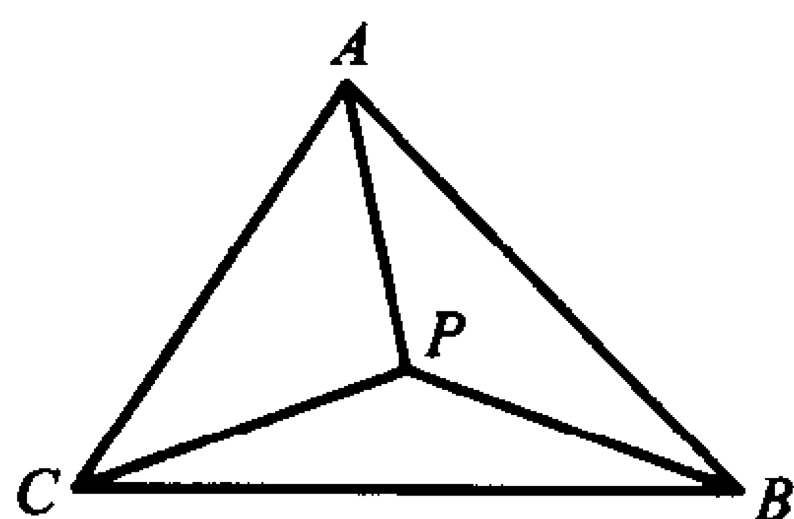


图 7 - 31

由于“折图”题的难度大，将立体几何题作为最后一道高考压轴题是史无前例的. 考后几乎少有人能得满分，大多数的人都无从下手，几乎全军覆没，得分率极差. 利用向量解本“折图”题的最大障碍在于建立坐标系，要写出不在空间坐标平面上的点的坐标是有一定难度的.

例 9　如图 7 - 32，在平面 α 内，C，D 在 AB 的异侧，$AD /\!/ BC$，$AD\perp AB$，$AD=AB=BC=10$，把半平面 DAB 沿 AB 翻折，使平面 $DAB\perp$ 平面 CBA，求直线 CD 与 AB 所成角的余弦值及距离.

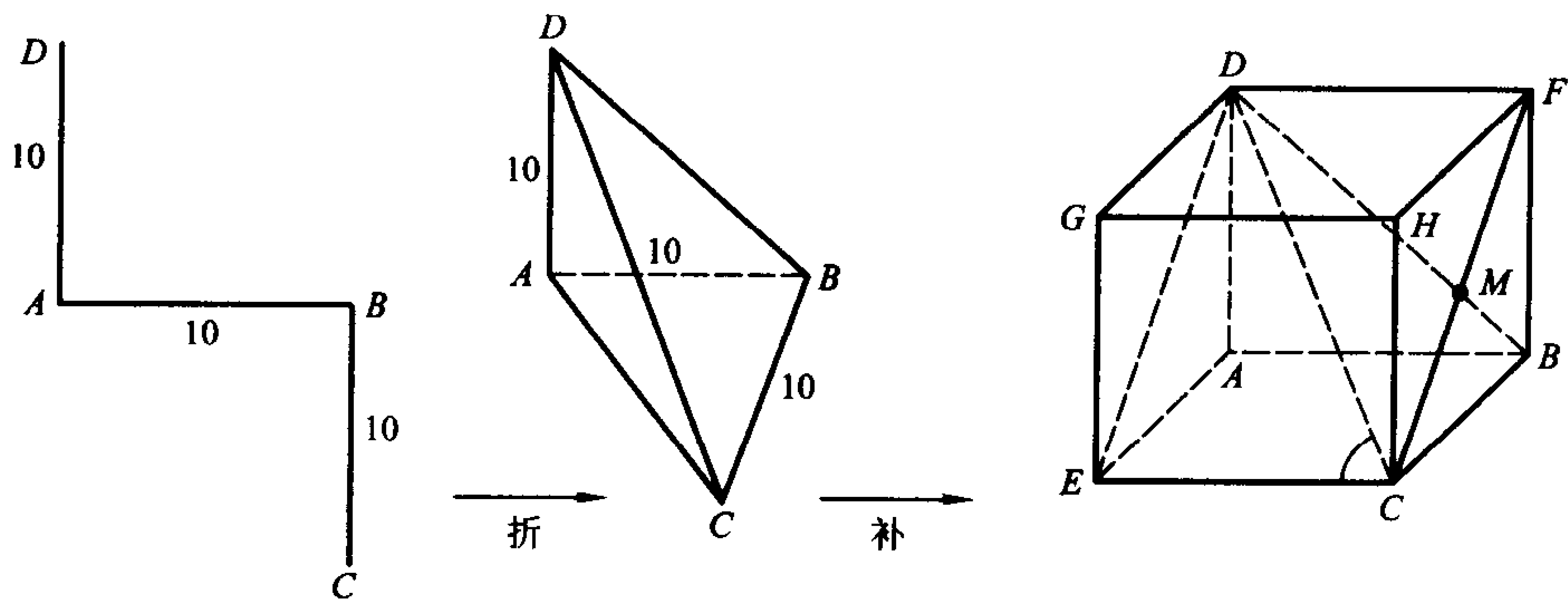


图 7 - 32

解法 1　(1) 由图 7 - 32 知，$AB /\!/$ 平面 $DECF$，于是 AB 与 CD 间的距离转化为 AB 与平面 $DECF$ 间的距离，因为 $BM\perp CF$，所以 BM 即为所求的距离，设

$BM=d, d^2+d^2=10^2$，所以 $d=5\sqrt{2}$.

(2) 在$\triangle CDE$中，$\angle DCE$即为异面直线AB与CD所成的平面角.

$(10\sqrt{2})^2=(10\sqrt{3})^2+10^2-2(10\sqrt{3})\cdot 10\cos\angle DCE$，

得　$\cos\angle DCE=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

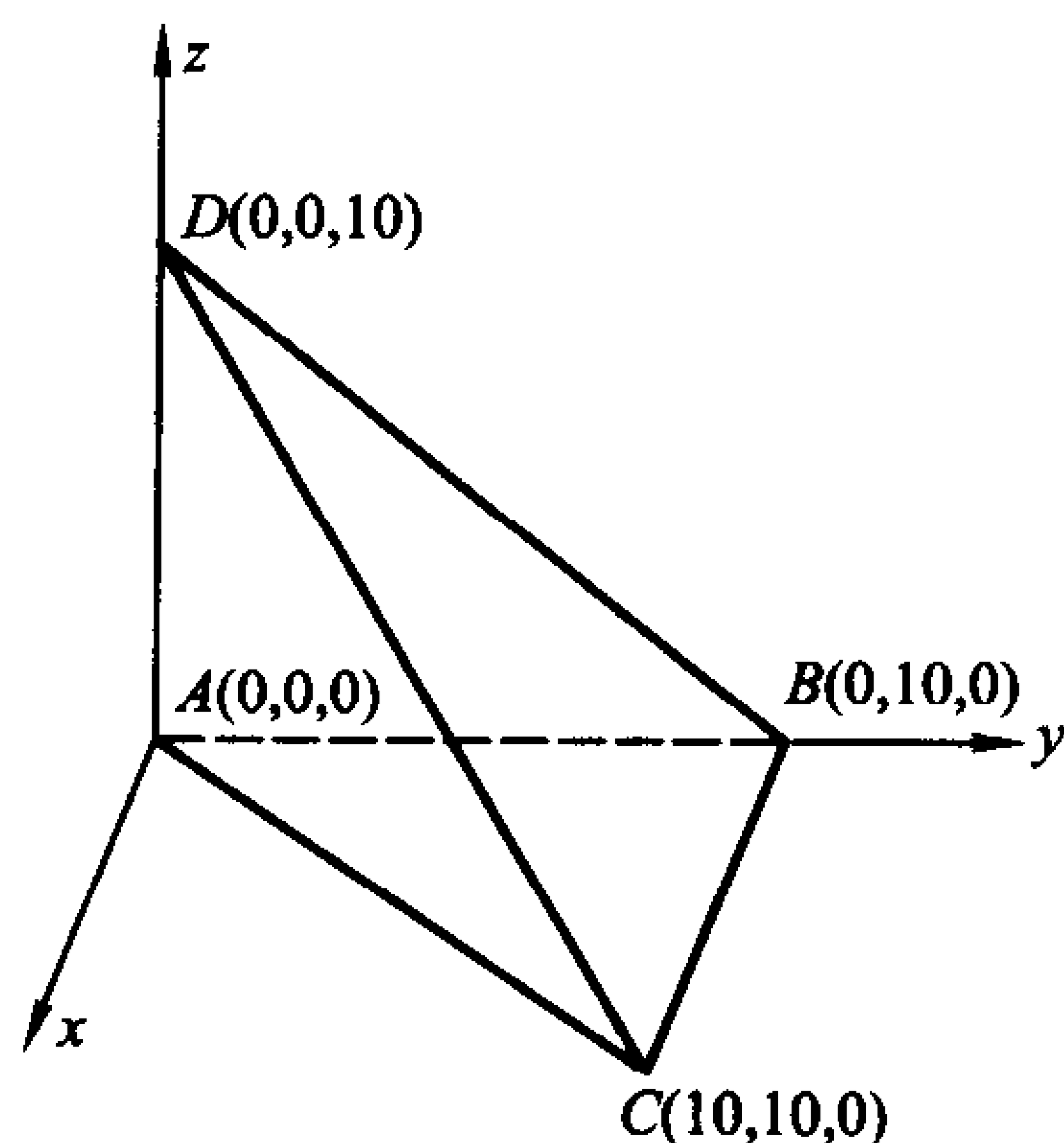


图 7 - 33

解法 2　(1) 如图 7 - 33，$\overrightarrow{DC}=(10,10,-10)$，$\overrightarrow{AB}=(0,10,0)$.

设异面直线CD与AB所成的角为θ，$\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{DC}|\cdot|\overrightarrow{AB}|\cdot\cos\theta$，

所以　$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{DC}||\overrightarrow{AB}|}=\dfrac{(10,10,-10)\cdot(0,10,0)}{\sqrt{300}\cdot\sqrt{100}}$

$$=\frac{100}{100\sqrt{3}}，所以 \cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

(2) 设异面直线的公垂线的方向向量为$\vec{n}$，则

$$\vec{n}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{DC}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 10 & 0 \\ 10 & 10 & -10 \end{vmatrix}=(-100,0,-100),$$

单位方向向量　$\vec{n}_0=\dfrac{\vec{n}}{|\vec{n}|}=\dfrac{(-100,0,-100)}{\sqrt{100^2+100^2}}=\dfrac{(-100,0,-100)}{100\sqrt{2}}$

$$=\left(\frac{-1}{\sqrt{2}},0,\frac{-1}{\sqrt{2}}\right).$$

因为　$\overrightarrow{DB}=(0,10,-10)$，

据异面直线距离公式 $d=|\overrightarrow{DB}\cdot\vec{n}_0|=\left|(0,10,-10)\cdot\left(\dfrac{-1}{\sqrt{2}},0,\dfrac{-1}{\sqrt{2}}\right)\right|$

$$=\frac{10}{\sqrt{2}}=5\sqrt{2}.$$

点评　在解法 1 中，本题是一个残缺的图，放入一个正方形中，即成一个完整的正方体图. 在这个正方体中，AB已平移为EC. 于是，欲求异面直线AB与DC的距离，转化为AB到平面$DECF$的距离，即找到了所求距离为CM.

同理可得：异面直线AB与DC所成的角即转化为在$\triangle DEC$中，EC与DC的夹角.

由上可见：在综合几何中，对于“折图”或“补图”的空间观念及推理论证的要

求都较高；然而，在向量几何中，解法 2 中所求之角及距离，都有现成的公式，代入公式，结论唾手可得.

例 10　给出两块相同的正三角形纸片，如图 7 - 34(a)，(b)所示，要求其中一块剪成一个正棱锥模型，另一块剪成正三棱柱模型，使它们的全面积都与原三角形的面积相等.

(1) 请设计一种剪拼方法，分别用虚线标示在图 7 - 34(a)，(b)中，并作简要说明；

(2) 试比较你剪拼的正三棱锥与正三棱柱的体积大小；

(3) 如果给出的是一块任意三角形的纸片，如图 7 - 34(c)，要求剪拼成一个直三棱柱模型，使它的全面积与给出的三角形的面积相等，请设计一种剪拼方法，用虚线标示在图 7 - 34(c)中，并作简要说明.

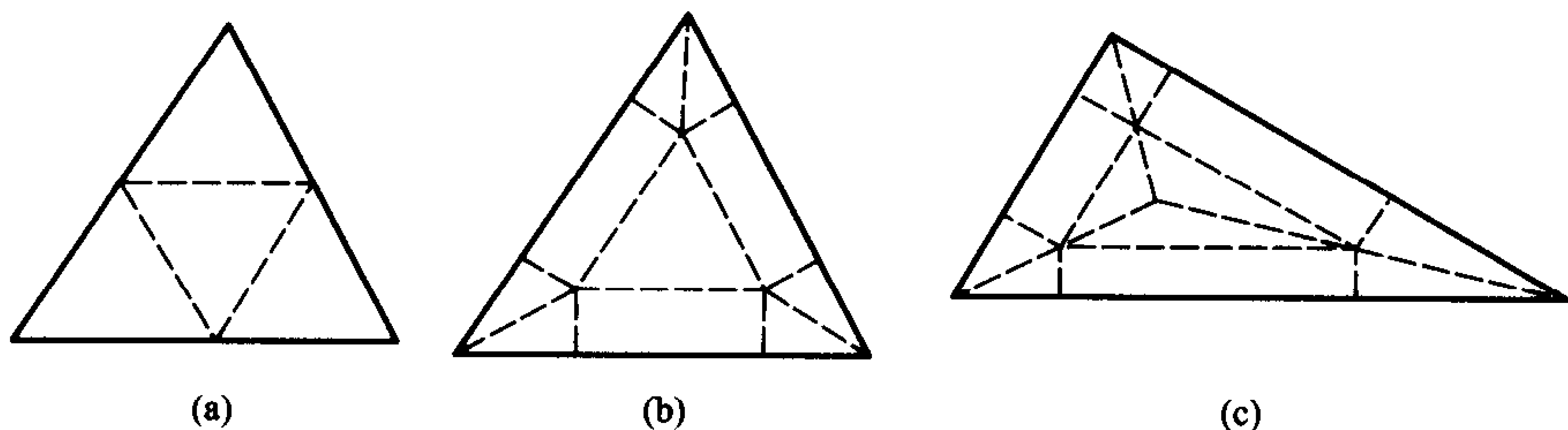


图 7 - 34

略解

(1) 如图 7 - 34(a)，沿三角形三边中点虚线折起，可拼得一个正三棱锥.

如图 7 - 34(b)，沿正三角形三个角上剪出三个相同的四边形，其较长的一组邻边边长为三角形边长的$\frac{1}{4}$，有一组对角为直角，余下部分按虚线折起，可成为一个缺上底的正三棱柱，而剪下的三个相同的四边形恰好拼成这个三棱柱的上底.

(2) 依上面剪拼方法，有 $V_{锥}<V_{柱}$.

证明如下：

设给出正三角形纸片的边长为 2，则正三棱锥与正三棱柱的底面都是边长为 1 的正三角形，其面积为$\frac{\sqrt{3}}{4}$，它们的高分别为

$$h_{锥}=\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3},h_{柱}=\frac{1}{2}\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{6},$$

$$V_{锥}-V_{柱}=\left(\frac{1}{3}h_{锥}-h_{柱}\right)\frac{\sqrt{3}}{4}=\frac{2\sqrt{2}-3}{24}<0,$$

所以 $V_{锥}<V_{柱}$.

(3) 分别连结三角形的内心与各顶点,得三条线段,再以这三条线段的中点为顶点作三角形,以新三角形为直三棱柱的底面,过新三角形的三个顶点向原三角形三边作垂线,沿六条垂线剪下三个四边形,可以拼成直三棱柱的上底,余下部分按虚线折起,成为一个缺上底的直三棱柱,即可得到直三棱柱模型.

点评 本题为将已知平面图形"折图"为一个满足欲求条件的立体图形,关键是通过"折图"前后,观察哪些元素及关系是不变的,而哪些元素及关系却改变了.然后可以结合"锥"、"柱"等定义,再由一定的空间想像力,进行分析并实验操作,也可使用现代化工具,不断尝试,得出猜想,然后进行计算并论证.

本题的难点在于将给出的正三角形纸片推广为任意三角形纸片.为此,需类似的方法作借鉴,需较强的类比能力.

第八章　平面解析几何研究与解题

笛卡儿创立平面解析几何是以下两个观念为基础的:一是使用坐标,二是把有相互关联的两个未知数的任意代数方程看成平面上的一条曲线.它不仅用坐标表示点的位置,而且将坐标通过“点动成线”的观点具体地用到建立曲线的方程上.

第一节　坐标系和坐标变换

1. 平面仿射坐标系

平面上可以建立不同的平面坐标系.常见的有平面直角坐标系(或称平面笛卡儿坐标系)、平面仿射坐标系,极坐标系.平面直角坐标系这里不再讨论.

平面仿射坐标系与平面直角坐标系的差别在于:仿射坐标系的两轴间的夹角不必是直角,可以取 $0^{\circ}\sim 90^{\circ}$间的值;此外,两轴上的单位长度可以不一致.因此,直角坐标系是一种特殊的仿射坐标系.通过建立仿射坐标系可以求解一些平面几何问题.

例 1　设等边$\triangle ABC$有一内接$\triangle A'B'C'$,A'在BC边上,B'在AC边上,C'在AB边上,且满足$\dfrac{AB'}{B'C}=\dfrac{BC'}{C'A}=\dfrac{CA'}{A'B}=k$($k>0$且$k\neq 1$为常数),连结$AA'$、$BB'$、$CC'$构成$\triangle PQR$.求证:$\dfrac{S_{\triangle PQR}}{S_{\triangle ABC}}=\dfrac{(k-1)^2}{k^2+k+1}$.

证明　建立仿射坐标系,取A为仿射坐标系原点O',AB和AC所在直线分别为仿射坐标轴$O'X'$和$O'Y'$.设$A(0,0)$,$B(k+1,0)$,$C(0,k+1)$,则$A'(k,1)$,$B'(0,k)$,$C'(1,0)$.于是,可求得直线AA'、BB'、CC'的方程分别为$y=\dfrac{1}{k}x$,$y=-\dfrac{k}{k+1}x+k$,$y=-(k+1)x+k+1$.

从而可求得　$P\left(\dfrac{k(k+1)}{k^2+k+1},\dfrac{k+1}{k^2+k+1}\right)$,

$$Q\left(\frac{k^2(k+1)}{k^2+k+1},\frac{k+1}{k^2+k+1}\right),R\left(\frac{k+1}{k^2+k+1},\frac{k^2(k+1)}{k^2+k+1}\right).$$

由
$$S_{\triangle PQR}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_P & y_P & 1 \\ x_Q & y_Q & 1 \\ x_R & y_R & 1 \end{vmatrix}=\frac{(k+1)^2(k-1)^2}{2(k^2+k+1)},$$

而
$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ k+1 & 0 & 1 \\ 0 & k+1 & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}(k+1)^2.$$

故
$$\frac{S_{\triangle PQR}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{(k-1)^2}{k^2+k+1}.$$

2. 极坐标系

用“距离和方向”表示点的位置的坐标系称为极坐标系．在极坐标系里，平面上任何 P 的位置，可以用它到极点的距离 ρ，以及 Ox 到射线 OP 的有向角 θ 来表示，ρ 称为点极径、θ 称为点 P 的极角．有序数对 (ρ,θ) 称为点 P 的极坐标．在极坐标系里，对于任何坐标 (ρ,θ)，平面上总有唯一的一点与它对应，但是反之却不然，对于平面上一个给定的点，可以有无穷多个极坐标与它对应，这是因为极角可以写成 $2k\pi+\theta$．但如果限定 $\rho\geqslant 0, 0\leqslant\theta<2\pi$，则平面上的点（除极点）便与极坐标一一对应了．

极坐标系有很多应用．例如海面上用雷达确定舰艇位置，常用距离和方向加以标志．

利用极坐标系，可以统一地讨论圆锥曲线的方程与性质，还可以方便地研究一些特殊的曲线的性质．

例 2　设 $M(\rho_0,\theta_0)$ 是圆锥曲线 $\rho=\dfrac{p}{1-e\cos\theta}$ 上任意一点，在极轴所在直线上取点 N，使 $|OM|=|NM|$．求 $\triangle OMN$ 重心 P 的轨迹方程．

解　如图 8-1，设 $P(\rho,\theta)$ 为 $\triangle OMN$ 的垂心，O、M 在三角形对边上的射影分别为 H 与 Q．于是 $|OM|\cdot\cos\theta_0=OQ=|OP|\cdot\cos\theta$，

故
$$\rho_0\cdot\cos\theta_0=\rho\cdot\cos\theta. \tag{1}$$

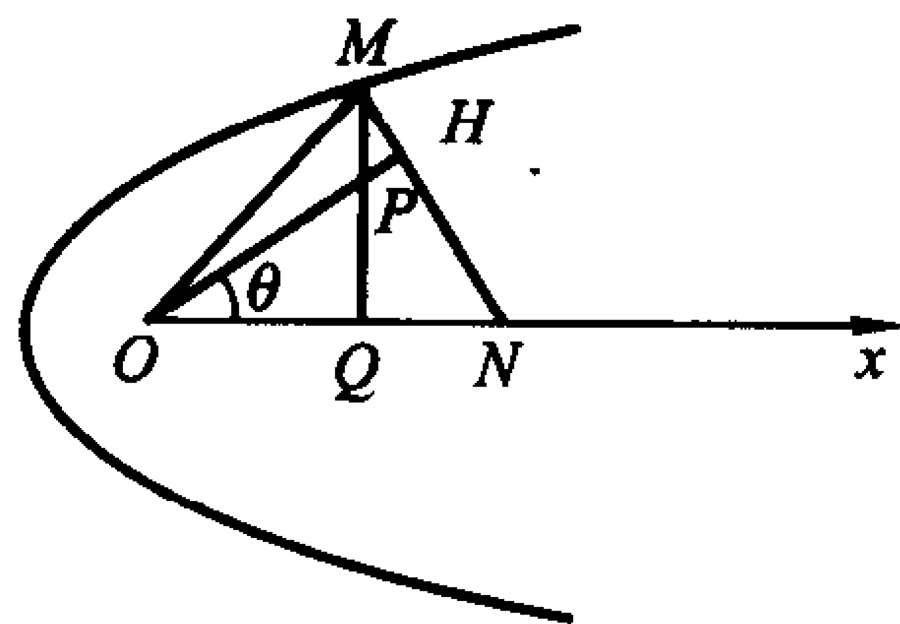


图 8-1

又点 M 的坐标 (ρ_0,θ_0) 满足所给曲线的方程，得

$$\rho_0=\frac{p}{1-e\cos\theta_0}. \tag{2}$$

将(2)代入(1)得
$$\rho=\frac{p\cdot\cos\theta_0}{(1-e\cos\theta_0)\cdot\cos\theta}. \tag{3}$$

另一方面，由于 $\angle NOM=\angle MNO$，且 $OH\perp MN$，则

$$\theta+\theta_0=\pm\frac{\pi}{2}.$$

即 $\theta_0=\frac{\pi}{2}-\theta$ 或 $\theta_0=-\frac{\pi}{2}-\theta$，代入（3）式，得垂心的轨迹方程 $\rho=\frac{p\sin\theta}{(1-e\sin\theta)\cdot\cos\theta}$ 或 $\rho=\frac{-p\sin\theta}{(1+e\sin\theta)\cdot\cos\theta}$.

由于上述两个方程表示同一曲线，故垂心的轨迹方程为 $\rho=\frac{p\sin\theta}{(1-e\sin\theta)\cdot\cos\theta}$.

3. 直角坐标与极坐标的关系

极坐标系与直角坐标系是两种不同的坐标系，但是，由于它们都是被用来表示平面上点的位置的，因此，对于同一点的极坐标和直角坐标存在着密切的联系. 设点 M 的直角坐标为 (x,y)，极坐标为 (ρ,θ)，则

$$\begin{cases}x=\rho\cdot\cos\theta,\\ y=\rho\cdot\sin\theta,\end{cases}\text{或}\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{x}{\rho},\\ \sin\theta=\dfrac{y}{\rho}\end{cases}(\rho\neq0).$$

上述两个公式均表示同一点在两种坐标系下的变换公式或互化公式.

习　题　8.1

设 $P(x,y)$ 为坐标平面内在直角坐标系 xOy 下的坐标点，对于此平面内仿射坐标系 $x'O'y'$ 下的点 $P'(x',y')$，试写出它们之间的关系式.

第二节　曲线、方程、函数

1. 曲线与方程

在直角坐标系中，平面上的点与有序实数对之间存在着一一对应的关系.

定义　设有一条曲线 Γ 和一个方程

$$F(x,y)=0, \tag{1}$$

如果曲线 Γ 上任何点的坐标都满足方程(1)，并且坐标满足方程(1)的一切点都在曲线 Γ 上，则称方程(1)是曲线 Γ 的方程，而称曲线 Γ 是方程(1)的轨迹或图形.

根据上述定义，要证明一个方程 $F(x,y)=0$ 是某曲线 Γ 的方程时，必须同时证明以下两个方面：

(i) 曲线 Γ 上的任何点的坐标都满足方程 $F(x,y)=0$；(轨迹的纯粹性)

(ii) 坐标满足方程 $F(x,y)=0$ 的一切点都在曲线 Γ 上.(轨迹的完备性)

由于一个命题及其逆否命题是同时为真或同时为假的，因此，前述条件(i)

和(ii)也可分别或同时用它们的逆否命题来代替：

(i′) 坐标不满足方程(1)的点，都不在曲线 Γ 上；

(ii′) 不在曲线 Γ 上的点的坐标都不满足方程(1).

在处理具体问题时，可以视方便选用.

在建立曲线的方程时，往往是根据动点所满足的条件.经过一系列化简，得出所求的方程.这时(i)或(i′)是自然地满足了的.所需证明的，只是(ii)或(ii′).在此，要指出的是，如果化简中进行的都是方程的同解变形，则(ii)或(ii′)也是成立的.这时，整个证明步骤就可以省略.

在建立曲线的方程时，有些规律难于用直角坐标系下的 x、y 的方程直接地表示出来.这时，常引进一个适当的辅助变量，比如说 t，把动点 (x,y) 的坐标分别表示成 t 的函数：

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\phi(t). \end{cases} \tag{2}$$

对于曲线 Γ 及方程(2)，如果

(i) 曲线 Γ 上任一点 $P(x,y)$ 可由某一 t 值通过(2)式给出；

(ii) 对于 t 的每一个允许值，由(2)式确定的 x、y 为坐标的点 $P(x,y)$ 都在曲线 Γ 上.

此时就称(2)为曲线 Γ 的参数方程，t 称为参变量或参数.而曲线 Γ 则称为方程(2)的图形.

在平面解析几何中，除讨论直线(其方程是二元一次方程)外，所讨论的曲线是圆锥曲线，因而讨论的方程主要是二元二次方程及其参数方程.

求曲线的方程，一般有五个步骤，这五个步骤和列方程解应用题的步骤完全类似.列表对比如下：

步　骤	列方程解应用题	求曲线的轨迹方程
Ⅰ	设未知数 x；	建立适当的坐标系；设动点坐标；
Ⅱ	寻求等量关系式；	写出适合条件 P 的点 M 的集合 $P=\{M\mid P(M)\}$；
Ⅲ	将文字语言翻译成代数语言，列出方程；	用坐标表示 $P(M)$，列出方程 $f(x,y)=0$(或 $\rho=g(\theta)$)；
Ⅳ	解方程；	化简方程 $f(x,y)=0$(或 $\rho=g(\theta)$)为最简形式；
Ⅴ	代入应用题检验.	证明以化简后的方程的解为坐标的点都是曲线上的点.

2. 方程与函数

方程与函数这两个重要概念之间存在着密切的联系.

一元函数 $y=f(x)$ 可以看成二元方程 $F(x,y)=y-f(x)=0$. 函数 $y=f(x)$ 的图像就是二元方程 $F(x,y)=y-f(x)=0$ 表示的曲线.

利用函数与方程的这种特殊关系，我们可以方便地讨论一些问题. 例如，某些函数图像的对称问题，可以将其化归为解析几何中曲线的对称问题，有以下结论：

结论 1(函数图像的中心对称问题)　函数 $y=f(x)$ 的图像关于点 $P(a,b)$ 的对称曲线方程为 $F(2a-x,2b-f(x))=0$.

结论 2　若曲线方程 $F(x,y)=0$ 与曲线方程 $F(2a-x,2b-y)=0$ 相同，则曲线 $F(x,y)=0$ 本身关于点 $M(a,b)$ 对称.

结论 3(函数图像的轴对称问题)　曲线 $F(x,y)=0$ 关于直线 $Ax+By+C=0$(A、B 不同时为 0)对称的曲线方程为 $F\left[x-\frac{2A}{A^2+B^2}(Ax+By+C),\ y-\frac{2A}{A^2+B^2}(Ax+By+C)\right]=0$.

证明提示　设 $F(x,y)=0$ 上任一点 (x_0,y_0) 关于直线 $Ax+By+C=0$ 的对称点为 (x,y)，则由 $\frac{y-y_0}{x-x_0}\cdot\left(-\frac{A}{B}\right)=-1$ 及 $A\cdot\frac{x+x_0}{2}+B\cdot\frac{y+y_0}{2}+C=0$ 联立求出 x_0，y_0 即可.

第三节　曲线的生成与类型的判别

1. 曲线的生成

曲线的生成有各种方式，如定义方式、作图方式、特征条件方式、再生方式、解释方式等. 在平面解析几何中，曲线主要是由定义方式和特征条件方式生成的.

(1) 与定点、定直线有关的生成问题

命题 1　平面内与两定点 F_1、F_2 的距离的和等于常数 $2a$ 的点的轨迹，当 $2a>|F_1F_2|$ 时是椭圆(即椭圆定义)；当 $2a=|F_1F_2|$ 时为线段 F_1F_2；当 $2a<|F_1F_2|$ 时无轨迹.

命题 2　平面内与两定点 F_1、F_2 的距离的差的绝对值是常数 $2a$ 的点的轨迹，当 $2a<|F_1F_2|$ 时是双曲线(即双曲线定义)；当 $2a=|F_1F_2|$ 时是以 F_1、F_2 为左、右端点在两定点所在直线上的两条射线；当 $2a>|F_1F_2|$ 时无轨迹.

命题 3　平面内与两定点的距离的平方和为定值的点的轨迹是一个圆，两

定点所在连线的中点是其圆心.（定和幂圆）

命题 4 平面内与两定点的距离的平方差为定值的点的轨迹是垂直于两定点连线的一条直线.（定差幂线）

命题 5 平面内与两定点的距离之比为定值 m 的点的轨迹，当 $m\neq1$ 时是一个圆（即阿波罗尼圆）；当 $m=1$ 时是两定点所在的直线.

命题 6 平面内与两个定点 A_1、A_2 的连线的斜率的乘积等于非零常数 λ 的点的轨迹是以线段 A_1A_2 的中点为中心的有心二次曲线. 当 $\lambda=-1$ 时是圆；当 $\lambda<0$ 且 $\lambda\neq-1$ 时是以 A_1A_2 所在直线为一对称轴的椭圆；当 $\lambda>0$ 时是以 A_1A_2 所在直线为实轴的双曲线.

命题 7 平面内到一定点的距离与到一条定直线的距离之比等于常数 e 的轨迹，当 $0<e<1$ 时是椭圆；当 $e=1$ 时是抛物线；当 $e>1$ 时是双曲线.（圆锥曲线的统一定义）

命题 8 平面内到一定点的距离 d_1 与到一条定直线的距离 d_2 的线性和 $\lambda d_1+\mu d_2(\lambda>0,\mu>0)$ 为定值的点的轨迹，当 $\lambda=\mu$ 时是两段抛物线弧；当 $\lambda>\mu$ 时是椭圆；当 $\lambda<\mu$ 时是双曲线.

（2）与定点、定直线、定圆配合生成的问题

命题 9 平面内到一定点 A 的距离等于到一定圆周的最短距离的点的轨迹，当 A 为定圆圆心时为一个圆；当 A 在定圆内且不为圆心时为椭圆；当 A 在定圆外时为双曲线的一支；当 A 在定圆上时为以定圆心为端点的射线.

命题 10 切于定圆且经过一定点的动圆圆心的轨迹，当定点为定圆圆心时为一个圆；当定点在定圆内且不为定圆圆心时为椭圆；当定点在定圆外时为双曲线；当定点在定圆上时为半直线.

（3）同型生成问题

命题 11 圆锥曲线的过焦点的弦的中点轨迹是同型的圆锥曲线.

命题 12 圆锥曲线的与某一顶点张角的两边之斜率乘积为定值的弦的中点轨迹为同型的圆锥曲线.

（4）定面积关系式的生成问题[①]

命题 13 在一直线上的四点 A、B、C、D 与动点 P 满足关系式 $S_{\triangle PAB}=S_{\triangle PCD}$ 的轨迹，当 $AB=CD$ 时，是去掉了这条直线的全平面；当 $AB\neq CD$ 时，是空集.

命题 14 设 a 是给定正数，对于平行四边形 $ABCD$，动点 P 满足条件 $S_{\triangle PAB}+S_{\triangle PCD}=a$ 的轨迹，当 $S_{\square ABCD}>2a$ 时，是空集；当 $S_{\square ABCD}=2a$ 时，是直线 AB 与 CD

① 张景中. 教育数学探索. 成都：四川教育出版社，1994：115—117

所夹的条形区域(含直线 AB、CD);当 $S_{\square ABCD}<2a$ 时,是与 AB 平行的两条直线 l_1、l_2,且 l_1 与 l_2 分居于 AB、CD 所夹的条形区域两侧,到条形区域边界距离为 $h=\frac{2a-AB\cdot d}{2AB}$,其中 d 是 AB 到 CD 的距离.

以上的 14 个命题,证明留给读者.

2. 曲线形状类型的判别

对于实系数二元二次方程

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0(A^2+B^2+C^2\neq 0) \qquad (\text{I})$$

所表示的是怎样的圆锥曲线?如何进行判别?一种方法是用坐标轴的平移和旋转变换,将其化为圆锥曲线的标准方程后,来确定它所表示的曲线的形状和位置.另一种方法是利用不变量 $I_1=A+\frac{1}{2}B$,$I_2=\frac{1}{4}\begin{vmatrix}2A & B\\ B & 2C\end{vmatrix}$,$I_3=\frac{1}{8}\begin{vmatrix}2A & B & D\\ B & 2C & E\\ D & E & 2F\end{vmatrix}$.

当 $I_2>0$ 时,若 $I_1\cdot I_3<0$,则为椭圆;若 $I_3=0$,则为点椭圆.

当 $I_2<0$ 时,若 $I_3\neq 0$,则为双曲线,若 $I_3=0$,则为两相交直线.

当 $I_2=0$ 时,若 $I_3\neq 0$,则为抛物线;若 $I_3=0$,则可为两平行直线或两重合直线或无轨迹.

还有一种简单判别法由下述定理给出.

定理 1 若 $C\neq 0$,则方程(Ⅰ)所表示的曲线 Γ 的形状,可由

$$\Delta_x=(B^2-4AC)x^2+2(BE-2CD)x+E^2-4CF$$

$$\xlongequal{\text{记为}} ax^2+bx+c \qquad (\text{II})$$

来判别:

(1) $\Delta_x=c(c<0)\Leftrightarrow\Gamma$ 是抛物线型空集;

(2) $\Delta_x=c(c\geqslant 0)\Leftrightarrow\Gamma$ 是两条平行或重合的直线:

$$2Cy+(Bx+E)\pm\sqrt{c}=0;$$

(3) $\Delta_x=bx+c(b\neq 0)\Leftrightarrow\Gamma$ 是抛物线;

(4) $\Delta_x=(px+q)^2(p\neq 0)\Leftrightarrow\Gamma$ 是两条相交直线:

$$2Cy+(Bx+E)\pm(px+q)=0;$$

(5) $\Delta_x=(px+q)^2+r(pr\neq 0)\Leftrightarrow\Gamma$ 是双曲线;

(6) $\Delta_x=-(px+q)^2+r(p\neq 0,r>0)\Leftrightarrow\Gamma$ 是椭圆(当 $B\neq 0$ 或 $A\neq C$ 时)或圆(当 $B=0$ 且 $A=C$ 时);

(7) $\Delta_x=-(px+q)^2(p\neq 0)\Leftrightarrow\Gamma$ 是一点$\left(\text{横坐标 } x=-\frac{q}{p}\right)$;

(8) $\Delta_x=-(px+q)^2+r(p\neq 0,r<0)\Leftrightarrow\Gamma$ 是椭圆型空集.

证明提示　由(Ⅰ)式，有

$$Cy^2+(Bx+E)y+(Ax^2+Dx+F)=0 \quad (C\neq 0),$$

由求根公式，有 $y=\dfrac{-(Bx+E)\pm\sqrt{\Delta_x}}{2C}$.

由此分别讨论、推导即得上述结论.

定理 2　当 $A\neq 0$ 时，方程(Ⅰ)所表示的曲线 Γ 的形状，可由

$$\Delta_y=(By+D)^2+4A(Cy^2+Ey+F) \qquad (Ⅲ)$$

来判别：

(1) $\Delta_y=(py+q)^2 \Leftrightarrow \Gamma$ 是两条直线：$2Ax+(By+D)\pm(py+q)=0$；

(2) $\Delta_y=(py+q)^2+r(pr\neq 0) \Leftrightarrow \Gamma$ 是双曲线；

(3) $\Delta_y=py+q(p\neq 0) \Leftrightarrow \Gamma$ 是抛物线；

(4) $\Delta_y=-(py+q)^2+r(p\neq 0, r>0) \Leftrightarrow \Gamma$ 是椭圆或圆；

(5) $\Delta_y=-(py+q)^2(p\neq 0) \Leftrightarrow \Gamma$ 是一个点；

(6) $\Delta_y=-(py+q)^2+r(p\neq 0, r<0) \Leftrightarrow \Gamma$ 是空集.

此定理的证明与定理 1 的证明类似，略.

定理 3　当 $A=C=0$ 时，方程(Ⅰ)所表示的曲线 Γ 的形状，可用 $DE-BF$ 来判别：

(1) 当 $DE-BF=0 \Leftrightarrow \Gamma$ 为两条互相垂直的直线：

$$Bx+E=0 \text{ 与 } By+D=0;$$

(2) 当 $DE-BF\neq 0 \Leftrightarrow \Gamma$ 为等轴双曲线.

证明提示　用平移变换将方程化简后讨论.

对于一般二元二次方程(Ⅰ)的系数，不外乎下述四种情况：(1) $A\neq 0, C\neq 0$；(2) $A\neq 0, C=0$；(3) $A=0; C\neq 0$；(4) $A=C=0(B\neq 0)$. 所以，对于任何二元二次方程，一定都至少可以利用上述三个定理之一，避开坐标变换的繁琐计算，直接地简易判定它所表示的圆锥曲线的形状类型.

习　题　8.3

1. 设 M 是一个动点，A 和 A' 是两个定点，由 M 作 $MN\perp A'A$ 于 N，若 $|NM|^2=k^2|A'N|\cdot|NA|$，k 为常数，求点 M 的轨迹.

2. 定直线 $x'x$ 上有一定点 O，设从动点 M 向 $x'x$ 作垂线 MN，N 为垂足. 若 $|NM|^2=k^2|ON|$，k 为常数，求动点 M 的轨迹.

3. 写出平面内到两相交定直线的有关轨迹.

4. 写出平面内到两平行定直线的有关轨迹.

5. 判别下列方程表示曲线的形状：

(1) $3y^2-4xy-4=0$;

(2) $2xy-6x-y-3=0$;

(3) $2xy+3x-4y+2=0$.

第四节　射影几何与平面解析几何

射影几何学有助于我们从几何学的全局与整体上来理解和把握中学的几何内容，把初等几何问题放在更为广阔的背景下加以考察. 这里，我们将运用射影几何的观点来分析和处理平面解析几何中的一些问题.

1. 椭圆、双曲线和抛物线性质的相关性

椭圆、双曲线和抛物线，都可以看作平面截圆锥面所得到的截线，从本质上讲，三种曲线是统一的. 由于平面与圆锥面中心轴交角的不同，才产生这种曲线形状的差异. 从轨迹的观点看，三种曲线都是一个动点到定点 F 和定直线 l 的距离之比等于常数 e 的轨迹，只是由于 $0<e<1$，$e>1$ 及 $e=1$ 三种不同的情况，才相应地将曲线分为椭圆、双曲线和抛物线. 若设平面与圆锥面中心轴成 $\beta\left(0\leqslant\beta\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ 角，圆锥面母线与其中心轴成 $\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ 角，则得到截线的离心率为 $e=\cos\beta\cdot\cos\theta$①.

由于这三种曲线具有同一性，因此，当我们在一种曲线上得到某项性质的时候，也可以在另外两种曲线上找到与此相关的性质.

以下我们从射影几何的观点出发进行探索.

射影几何观点认为：椭圆、抛物线和双曲线与无穷远直线分别有零个交点、一个交点和两个交点，或者说，无穷远直线分别与椭圆、抛物线、双曲线"相离"、"相切"、"相交"，如图 8－2 所示. "双曲线、椭圆各有一中心且为有穷远点，而抛物线的中心为无穷远点."

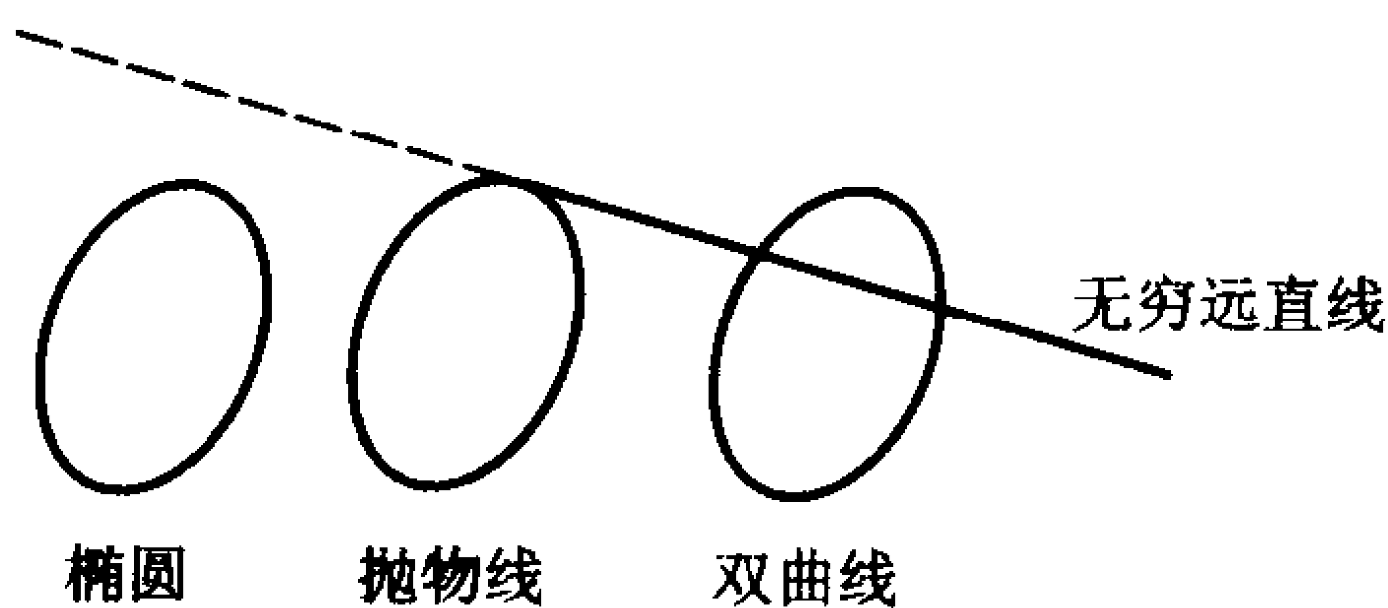


图 8－2

在这种观点下，容易得到三种曲线的演变规律($0<e<1\to e=1\to e>1$)：

(1) 椭圆的两焦点连线先演变成抛物线轴上自焦点出发的射线(曲线中心由有穷远点演变成右边无穷远点)，继而演变成双曲线轴上自焦点出发的两条无

① 沈文选. 一类旋转面截线的一条性质. 数学通讯，1985(7)：31—33

重合的射线(曲线中心右边无穷远点演变成左边的有穷远点)；

(2) 椭圆的右顶点先演变成抛物线轴上的无穷远点，继而演变成双曲线的左顶点；

(3) 椭圆内部含焦点区域(或外部不含焦点的区域)，先演变成抛物线的右侧含焦点区域(或左侧不含焦点区域)，继而演变成双曲线左右两支含焦点的区域(或左、右两支中间不含焦点的区域).

因此，如果在一种曲线上存在某一项关于某些几何元素的性质，那么这些元素按着上述(1)～(3)的演变规律进行变迁，就容易找到它们在另外两种曲线上的相关性质①.

例 1　过椭圆上任意两条平行线中点的直线必过椭圆的中心.

分析　抛物线也有平行弦，但无中心，按照演变规律(1)，中心在抛物线轴上无穷远处；双曲线有中心，且双曲线任一支都可以看作由椭圆(固定不同的焦点)演变而成. 于是，得相关命题：

命题 1　过抛物线上任意两条平行线中点的直线必与对称轴平行或重合.

命题 2　双曲线上每一支上任意两条平行弦的中点所连直线必通过双曲线的中心.

例 2　如图 8-3，设 M、N 为双曲线的左、右顶点，F_1、F_2 为左、右焦点，P 为双曲线上除顶点以外的任意一点. 求 $\triangle PF_1F_2$ 的内切圆在直线 F_1F_2 上的切点的位置.

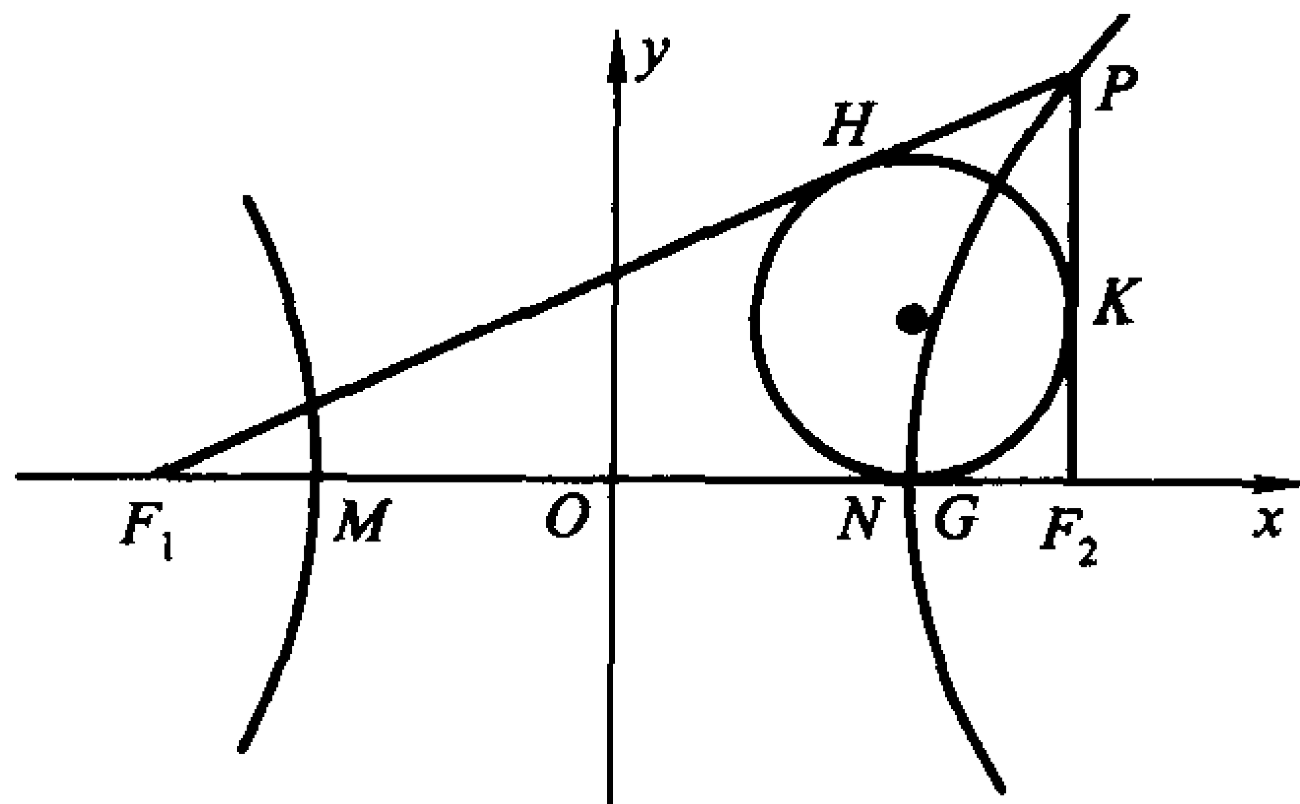


图 8-3

分析　由于点 P 在双曲线右支上，可设 $\triangle PF_1F_2$ 的内切圆分别切 PF_1、F_1F_2、PF_2 于点 H、G、K. 由 $|GF_1|-|GF_2|=|HF_1|-|KF_2|=|PF_1|-|PF_2|$，可知点 G 在双曲线上，即点 G 与顶点 N 重合. 故 $\triangle PF_1F_2$ 的内切圆在直线 F_1F_2 上的切点位置是双曲线的顶点.

为了找出其他两种曲线的相关命题，我们着重研究 $\triangle PF_1F_2$ 与圆相切的切点的变迁情况：圆与 PF_1 的切点不在含焦点区域，圆与 PF_2 的切点在含焦点区域. 因此，由演变规律(1)、(3)，可得相关命题：

命题 1　设 M、N 为椭圆的左、右顶点，F_1、F_2 为椭圆的左、右焦点，P 为椭圆上除顶点外任意一点，则 $\triangle PF_1F_2$ 的边 PF_1 或 PF_2 上的旁切圆，必与直线

① 邹楼海. 椭圆、双曲线和抛物线性质的相关性. 数学通讯，1994(2)：6—9

F_1F_2 相切于点 M 或点 N.

命题 2　设 M 为抛物线的顶点，F 为焦点，P 为抛物线上除顶点以外的任意一点，沿射线 FM 的方向作平行射线 PT，则与射线 PT、FM 及线段 PF 相切的圆必切射线 FM 于点 M.

2. 圆的命题的推广

圆锥曲线包括圆、椭圆、双曲线和抛物线. 在第四章几何名题欣赏中已介绍了将圆中的蝴蝶定理可推广到椭圆、双曲线、抛物线中去. 有关圆的命题，哪些可以推广到椭圆，哪些甚至还能推广到双曲线和抛物线，而哪些只对圆成立，不能推广？这将涉及图形的度量性质，仿射性质和射影性质以及三者之间的关系.

例如，求圆的切线方程可以归结为求与过切点的半径垂直的直线方程，而求圆锥曲线的切线方程则归结为求与曲线有重合交点的直线方程. 二者是不同的. 前者用到圆的切线垂直与过切点的半径这一性质，这是一个纯度量性质，只为圆所独有. 因此，这种求切线的方法不能推广到椭圆、双曲线和抛物线的情形. 后者用到直线与曲线有重合交点，这条性质是射影性质，对所有圆锥曲线皆成立，包括圆在内. 如果将求圆的切线方程改为求与圆有重合交点的直线方程，那就可以推广到椭圆、双曲线和抛物线了.

再看以下命题①：

设圆上三点 A、B、C 处的切线依次为 $B'C'$、$C'A'$、$A'B'$. 若 $BC /\!/ B'C'$，$AB /\!/ A'B'$，则 $CA /\!/ C'A'$.

事实上，如图 8－4，可设圆的方程为 $x^2+y^2=a^2$. 取 $A(a,0)(a>0)$，则过点 A 的切线方程为 $x=a$，可求得 $B(-b,-\sqrt{a^2-b^2})$，$C(-b,\sqrt{a^2-b^2})$ $(b>0)$. 分别计算出 k_{AB}、k_{AC}、$k_{A'B'}$、$k_{A'C'}$，可得 $k_{AB}=k_{A'B'}$，于是推得有 $k_{AC}=k_{A'C'}$，即证得 $CA /\!/ C'A'$.

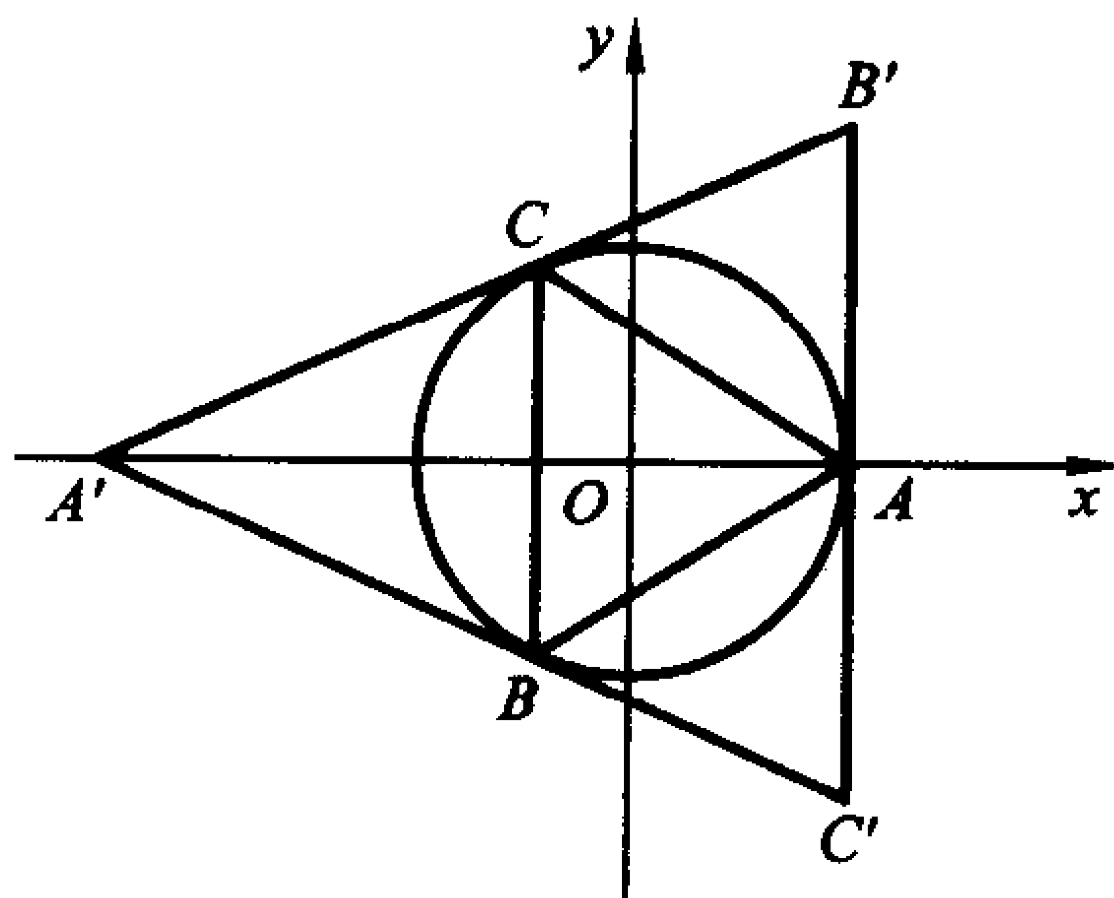


图 8－4

如上命题可否推广到椭圆？显然，上述证法对椭圆不适用. 因为圆上每一点的地位完全平等，所以可取任一点为 $A(a,0)$，而对椭圆则不行. 另外，上述命题能否推广到椭圆，要看能否证明成立或举出反例. 然而，如果运用射影几何知识，得知圆的仿射对应图形是椭圆，平行是仿射性质，而上述命题只涉及圆的仿射性质. 经过仿射变换，圆变成椭圆，仿射性质不变，因此，可断定上述命题能够推广到椭圆. 剩下的事只需加以证明.

① 王敬庚. 射影几何指导中学解析几何教学举例. 数学通报，1991(4)：37—39

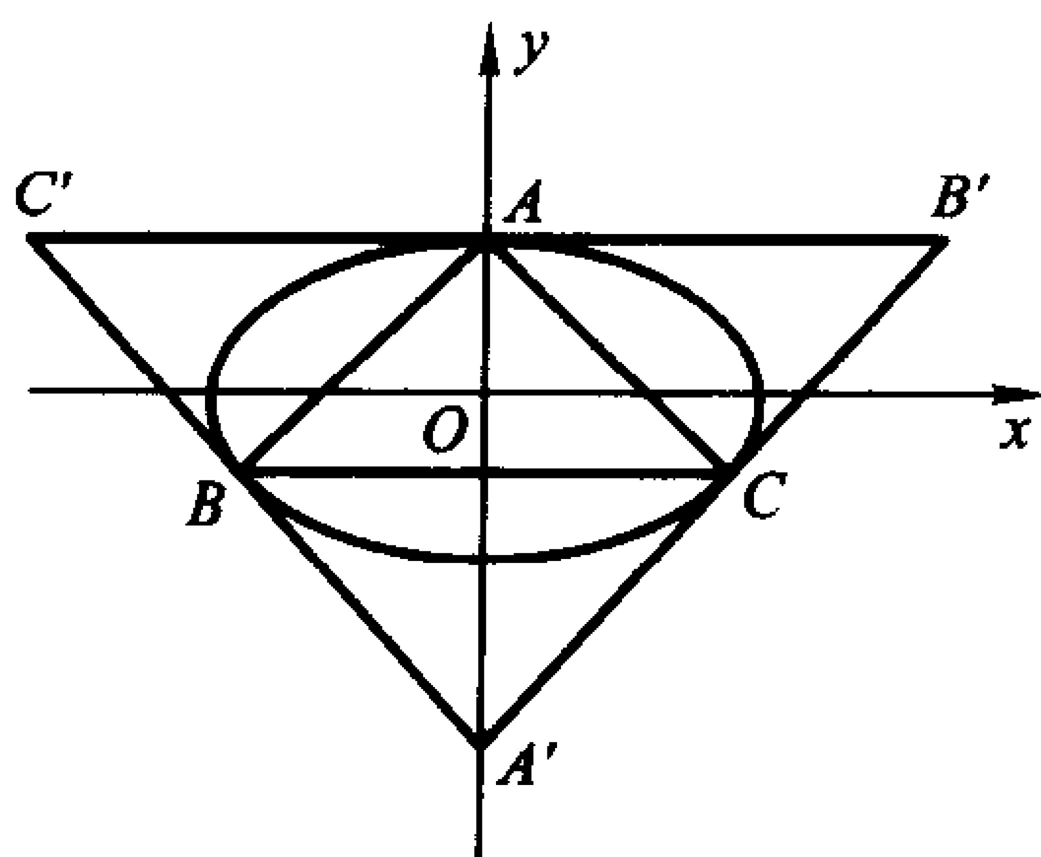


图 8－5

如图 8－5，设椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 上三点 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$、$C(x_3,y_3)$，则 $k_{BC}=\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}$，$k_{CA}=\frac{y_1-y_3}{x_1-x_3}$，$k_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$，$k_{B'C'}=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$，$k_{C'A'}=-\frac{b^2x_2}{a^2y_2}$，$k_{A'B'}=-\frac{b^2x_3}{a^2y_3}$.

由 $k_{BC}=k_{B'C'}$ 及 $k_{AB}=k_{A'B'}$ 得

$a^2y_1(y_3-y_2)=-b^2x_1(x_3-x_2)$，(1)

$a^2y_3(y_2-y_1)=-b^2x_3(x_2-x_1)$，(2)

由(1)＋(2)整理得 $a^2y_2(y_3-y_1)=-b^2x_2(x_3-x_1)$.

即有 $k_{CA}=k_{C'A'}$. 所以 $CA /\!/ C'A'$.

此时，关于椭圆的上述命题能否推广到双曲线和抛物线？乍看，上述对椭圆情形证明的每一步都可以“完全形式地”照搬到双曲线和抛物线的情形，似乎可以推广. 但实际上，该命题的前提条件对于双曲线和抛物线都是不可能实现的. 即在双曲线和抛物线上，不存在这样的三点 A、B、C，使得 A 点处的切线平行于 BC，又使得 C 点处的切线平行于 AB. 这是因为在射影几何中，有如下结论：

结论　设常态二阶曲线 Γ 上三点 A、B、C 处的切线依次为 $B'C'$、$C'A'$、$A'B'$，则 BC 交 $B'C'$、CA 交 $C'A'$、AB 交 $A'B'$ 的三个交点所在直线 l 与该曲线 Γ 无实交点.

这样，上述结论中三交点所在直线 l 投射成无穷远直线时，则该常态二阶曲线 Γ 不可能投成双曲线和抛物线. 这是因为在射影—仿射平面上，无穷远直线分别与椭圆、双曲线、抛物线“相离”、“相交”、“相切”(如图 8－2). 因此，当 Γ 是双曲线和抛物线时，上述结论中的直线 l 不可能是无穷远直线. 也就是对于双曲线和抛物线，BC 与 $B'C'$，AB 与 $A'B'$ 不可能同时交于无穷远点，即 $BC /\!/ B'C'$ 与 $AB /\!/ A'B'$ 不可能同时出现.

3. 用射影几何解释一些问题

将欧氏平面拓广，添加无穷远点和无穷远直线，构成射影—仿射平面，并在其上建立点的齐次坐标和曲线的齐次方程，可以清晰地解释一些解析几何中的问题：

问题 1　直线和圆锥曲线一般有两个交点(当两个实交点不同时，称直线为割线；两交点重合时，称直线为切线；两交点为虚点时，称直线与曲线相离). 但当直线与抛物线的对称轴平行时，或直线与双曲线的渐近线平行时，都只有一个实交点，那么另一个交点呢？

问题 2　对于椭圆和双曲线的每一条切线，都有与它平行的另一条切线，而对于抛物线的任何一条切线，都没有与它平行的另一条切线. 为什么会发生这种

差别？

问题 3　存在不存在与双曲线两支都相切的直线？

问题 4　两个不同椭圆最多可以有四个不同的实交点，圆是椭圆的特例，但是，两个不同的圆最多只可能有两个不同的实交点，这是什么缘故？

类似的问题还可举出一些.这些问题请读者进行解释.

习　题　8.4

1. 根据圆锥曲线的演变性质相关性，写出与下列命题性质相关的另两种曲线的命题：

(1) 以双曲线焦半径为直径的圆必与以实轴为直径的圆相外切.

(2) 设椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的二顶点为$A(a,0)$，$A'(-a,0)$，与$y$轴平行的直线交椭圆于$P$，$P'$，则直线$AP$与$A'P'$的交点的轨迹方程为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

2. 根据离心率的变化规律，写出与下述命题性质相关的另两种曲线的命题：以抛物线的焦点弦PQ为直径的圆必与其准线相切.

3. 已知$\triangle ABC$三边上分别分三边AB、BC及CA成有相同比值的两条线段的三个分点顺次为L、M及N.求证：$\triangle ABC$和$\triangle LMN$有相同的重心.

4. 试从变换的角度分析本节中关于圆的切线与弦平行的命题为什么不能推广到双曲线和抛物线.

第五节　平面解析几何的教学

解析几何是高中的课程，内容只限于平面解析几何.重点是直线和圆，以及二次曲线的方程.核心思想是“数与形之间的转换和结合”.关于具体的教学过程，有以下的评论建议.

1. 关于坐标系

大家知道，坐标系是解析几何借以展现的舞台.不过，用坐标确定点的位置，早在小学已经有所介绍，虽然那时只限于第一象限和整数坐标.初中引入函数概念时，全面地介绍了直角坐标系，并借以描绘函数图像.因此，在高中阶段进行解析几何教学，就不必在直角坐标系上过多停留.应该把重点放在坐标系的多样性(例如有极坐标)，以及坐标个数和平面与空间的维数问题.适当提一下n维空间，也是可以的.至于坐标变换，现在已经从课程中删去了.值得注意的是，在具体数学问题中，如何架设比较合适的坐标系，使得表示简洁，计算简便，是一个十分重要的问题.

2. 点的坐标与向量、复数的关系

几何学中的向量，乃是有向的线段. 自由向量可以不用坐标系. 但是我们的大多数研究都需要使用坐标系来表示向量. 平面上的位置向量就是用一对有序的实数来表示的. 复数的几何表示也是一对有序实数. 在教学中，(a,b)既可以表示平面上一个点的坐标，又可以表示一个位置向量，还可以表示一个复数. 不过，点是没有代数结构的(点不能作加法、乘法). 向量有自己的加法和乘法(数量积和向量积)，而复数的加法和向量一样，但是乘法就不同了，有自己的乘法定义. 在教学中我们要注意彼此间的联系与区别.

3. 关于"数形结合"的思想

华罗庚先生说过："数形结合万般好". 在我国数学教育界，数形结合的思想深入人心. 结合的意思是，运用坐标表示，使得几何的"点"和代数的"数"之间构成对应关系，进而把曲线上的"几何点集"，和满足方程的"坐标数集"对应起来，并且能够相互转换. 这种数和形之间的转换能力，是"数学双基"的一部分，数学思想的华彩乐章.

同样的曲线，可以转换成不同的方程. 例如以 r 为半径的圆，有直角坐标系下的方程 $x^2+y^2=r^2$，也有极坐标方程 $\rho=r$，还有参数方程 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，什么时候用怎样的方程表示，是一个难点.

我们常常说，解析几何是用代数方法研究几何问题. 其实还有另外一面：用几何观点分析代数问题. 数形转换是双向受益的. 在第六节还会举例说明.

4. 如何理解"数学中的转折点是笛卡儿的变数"

恩格斯在《自然辩证法》中指出："数学中的转折点是笛卡儿的变数. 有了变数，运动进入了数学. 有了变数，辩证法进入了数学. 有了变数，微分和积分立刻成为必要的了."

恩格斯把笛卡儿的"变数"看作转折点，是非常正确的. 在笛卡儿之前，方程是静态的，人们只关注如何求出方程的根. 几何研究虽然把曲线看作动点运动的轨迹，但是曲线不能计算. 只当笛卡儿把动点形成的曲线看作是"坐标(数)"变化的结果，变数才破土而出.

牛顿在这基础上，将曲线看作是动点的路径，把物体运动的轨迹表示为参数方程 $x=x(t), y=y(t)$. 然后研究流数 $x'(t)$和 $y'(t)$，由此诞生了微积分.

莱布尼茨则从曲线的切线入手研究曲线性质，在坐标系上观察到，函数在一点的切线斜率的变化，对研究函数的性质有重大价值.

这样，微积分学就产生了.

我们把函数作为描述运动的工具. 但是追溯函数的来源，正是对各种特殊的曲线的概括. 笛卡儿在 1637 年给出了坐标几何的思想. 1967 年，J. 格里高利给

出了第一个比较明确的函数定义.

"从希腊时代到1600年,几何统治着数学,代数居于附庸的地位.1600年以后,代数成为基本的数学部门.在这作用的交替中,微积分是决定的因素."[①]笛卡儿的变数,就是1600年之后发生的那个转折点.

5. 数形结合的思想是不断发展的

中学里的解析几何课程,常常给人这样的印象:解析几何就是为研究二次曲线服务的.其实,解析几何的价值,远远超过二次曲线的范围.大学里要学习空间解析几何.线性代数和解析几何有密切的关系,主要原因在于坐标变换是线性变换.此外,高次曲线,高次曲面的研究直接导致"代数几何学".许多曲线曲面的研究还只是刚刚开始.费马大定理 $x^n+y^n=z^n$ 当 $n\geqslant 3$ 时无解,就可以看作是一个 n 次曲面上是否存在整数点问题.这对于扩展学生的视野,鼓励学生探索数学奥秘很有好处.

6. 关于二次曲线的教学

二次曲线和圆锥曲线是一回事.但是学生只看到这些曲线的方程是"二次"的,却不知道为什么叫"圆锥曲线".因此,应该加强用平面截取圆锥得到的各种截线的直观教学.

二次曲线的教学内容,正在渐渐减少.最新的高中课程标准,只要求掌握圆锥曲线的标准形式,知道焦点,长短轴,渐进线,以及一些最基本的性质.离心率已经淡化,如果说抛物线的准线需要介绍,椭圆和双曲线的准线却删去了.早先要求讨论一般的二次曲线:$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$,以及坐标变换等,现在都移到大学数学课程.

渐进线涉及"无限"接近,这也是关于"认识无限"的话题.

二次曲线的应用,主要有三方面:(1) 行星运动和卫星运动的轨迹;(2) 光学性质;(3) 美学价值.前两者的应用,推导过程比较复杂,在实际教学中,只能作简单介绍,给出结果.有些教师,要求学生用直线、圆、二次曲线画一张卡通画,写出每段曲线的方程,也是一个很好的锻炼.

7. 处理方程和函数的关系

方程和函数是中学里最重要的两个概念,它们之间有密切的联系."同样的一个等式,可以用两种观点去考察".这是基本的数学素养.但是,很多学生不能很好地认识和掌握.教学中应当注意阐述二者之间的连接,反复强调.

值得注意的是单值函数与多值函数的认识.中学里的函数概念中强调函数的"单值性".但是,方程所蕴涵的函数却往往是多值的,需要单值化处理.例如,

---

① M.克莱因.古今数学思想(二).中译本.上海:上海科技教育出版社,2002:25

圆方程获得的函数是多值的，要分为上下半圆两个分支处理，也就是用两个单值函数加以表示. 解析几何中的抛物线方程是 $y^2=2px$，和一元二次函数 $y=x^2$ 的形式是不同的，这也常常引起学生的理解困难.

8. 尽量使用几何教育软件

几何是直观的. 在有条件的地方，应当多使用计算机课件，展现圆锥曲线的形成过程，看到随着离心率的变化，怎样从一种曲线变到另外一种. 另外，实际观测我国的人造卫星和载人飞船的运行轨道，对于学生理解二次曲线及其性质，都会有极其重要的作用.

第六节　二次曲线的实际应用

圆锥曲线与实际应用问题：

（1）圆锥曲线与天体运行的轨道

地球和其他行星绕太阳运行的轨道以及月亮和人造地球卫星绕地球运行的轨迹都是圆锥曲线. 关于人造卫星运行的轨道的形状与水平方向发射火箭的初速度的关系，可以用图 8－6 示意：

图 8－6 中的

1 表示圆周 $v_0=7.91(\mathrm{km/s})$；

2 表示椭圆 $v_0=10.0(\mathrm{km/s})$；

3 表示椭圆 $v_0=11.0(\mathrm{km/s})$；

4 表示椭圆 $v_0=11.1(\mathrm{km/s})$；

5 表示抛物线 $v_0=11.19(\mathrm{km/s})$；

6 表示双曲线 $v_0=12.0(\mathrm{km/s})$；

7 表示直线 $v_0\to\infty$.

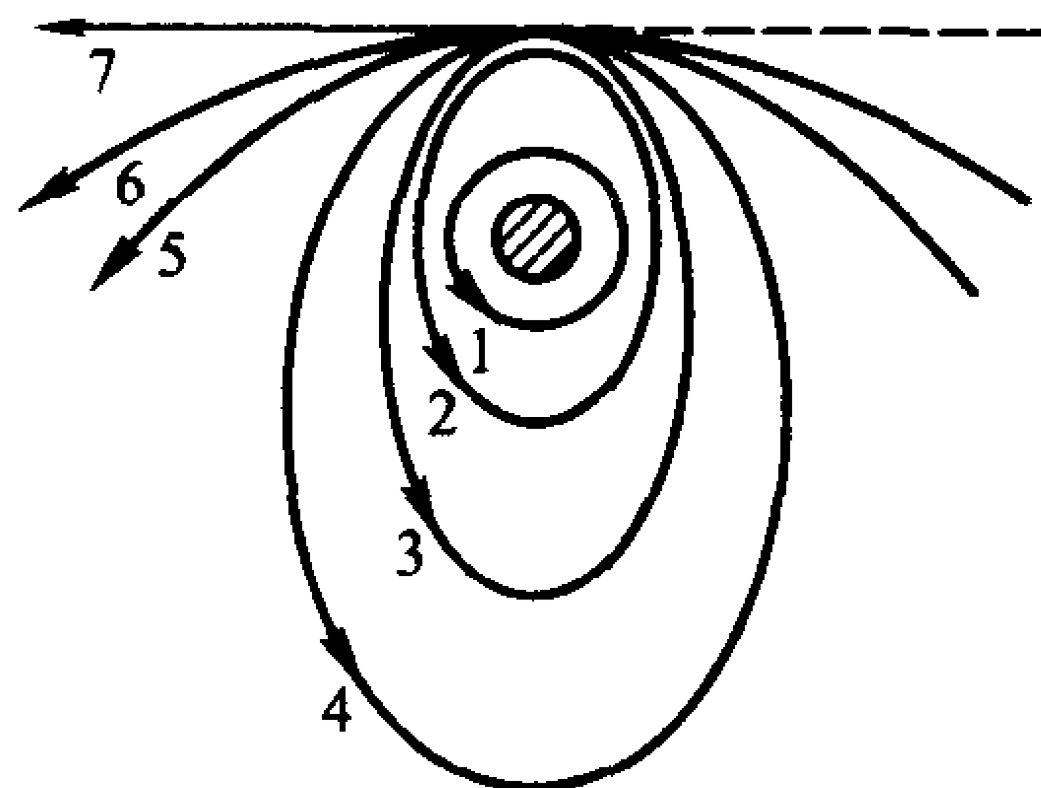


图 8－6

（2）椭圆、抛物线、双曲线的光学性质及应用

椭圆的光学性质：从椭圆的一个焦点发出的光线，经过椭圆反射后，反射光线都聚交于椭圆的另一个焦点上.

抛物线的光学性质：从抛物线的焦点发出的光线，经过抛物线反射后，反射光线都平行于抛物线的轴；反之，沿着平行于抛物线的轴的方向向抛物线发出的光线，经过抛物线反射后，反射光线都聚交于抛物线的焦点上.

双曲线的光学性质：从双曲线的一个焦点发出的光线，经过双曲线反射后，反射光线是散开的，它们就好像是从另一个焦点（称为虚焦点）发出的一样；反之，向双曲线的一个焦点（也称虚焦点）发出的光线，经过双曲线反射后，反射光线都聚交于双曲线的另一个焦点上.

利用椭圆的光学性质，制作电影放映机的放映灯泡，这种灯泡的玻璃内壁上镀铝，并留有透明窗（通光孔），它的反射镜面是旋转椭球面的一部分. 如图 8-7，中心截口 BAC 是椭圆的一部分，灯丝位于它的一个焦点 F_1 上，片门位于另一个焦点 F_2 上，从而获得最强光线.

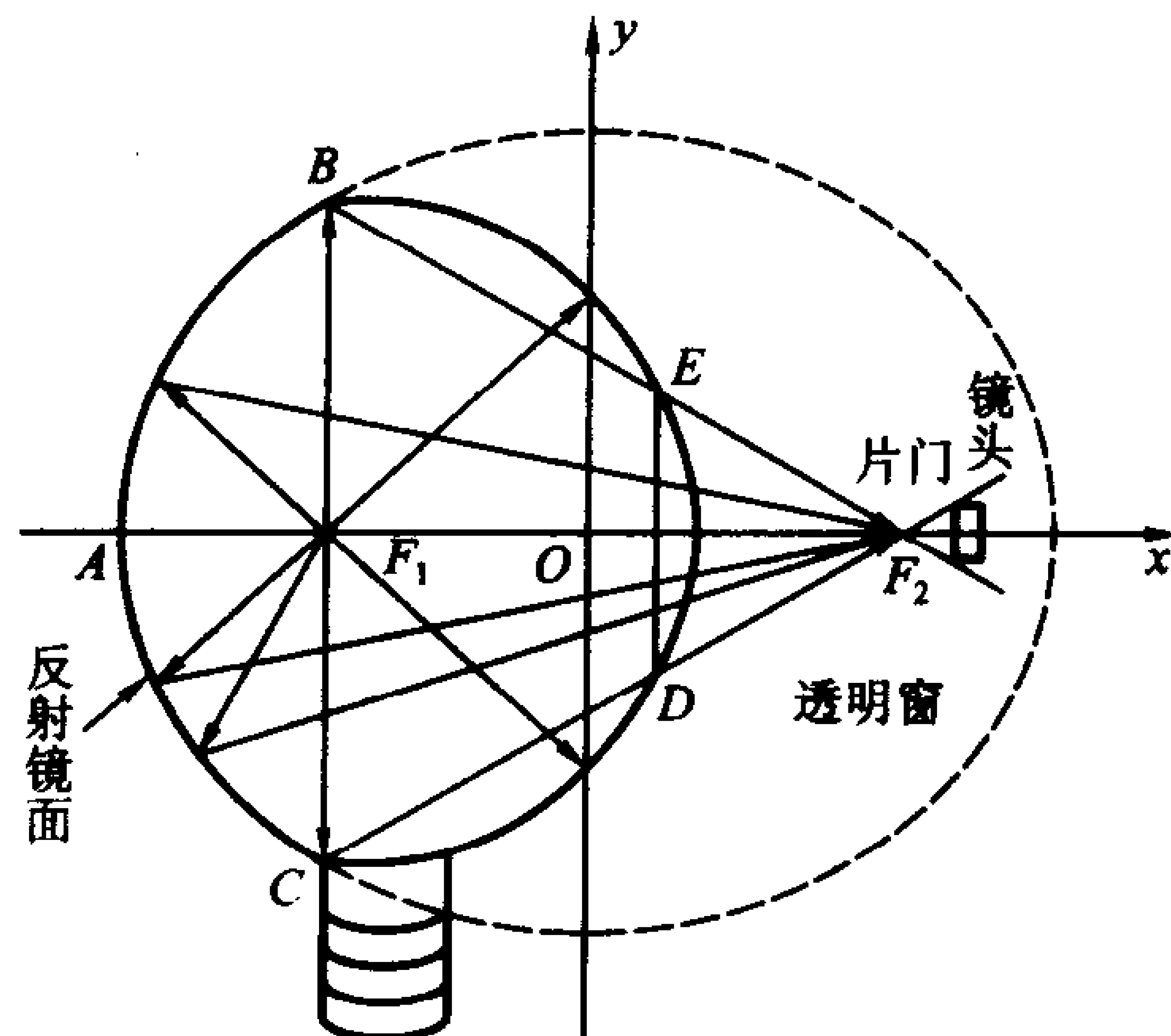


图 8-7

利用双曲线的光学性质，可以制作室内拍照时的照明灯具，为了把被摄对象照得更亮，摄影师总想把灯尽可能放近些. 为获得足够的亮度，又使光线尽可能地均匀柔和，就可把灯具反光镜的表面做成双叶旋转双曲面的形状，并放灯丝恰好位于焦点.

综合应用抛物线与双曲线的光学性质，可以设计制造出反射式天文望远镜，这种望远镜的特点是镜筒的长度可以相对地很短，但观测天体的运动或位置关系却相对地很清楚.

例如，南京天文仪厂设计制造的一种反射式天文望远镜，其光学系统的原理示意图（即中心截口示意图）. 如图 8-8，其中一个反射镜 PQ 弧所在的曲线为抛物线，另一个反射镜 MN 弧所在的曲线为双曲线的一个分支. 又 F_1、F_2 为双曲线的两个焦点，且 F_2 兼为抛物线的焦点.

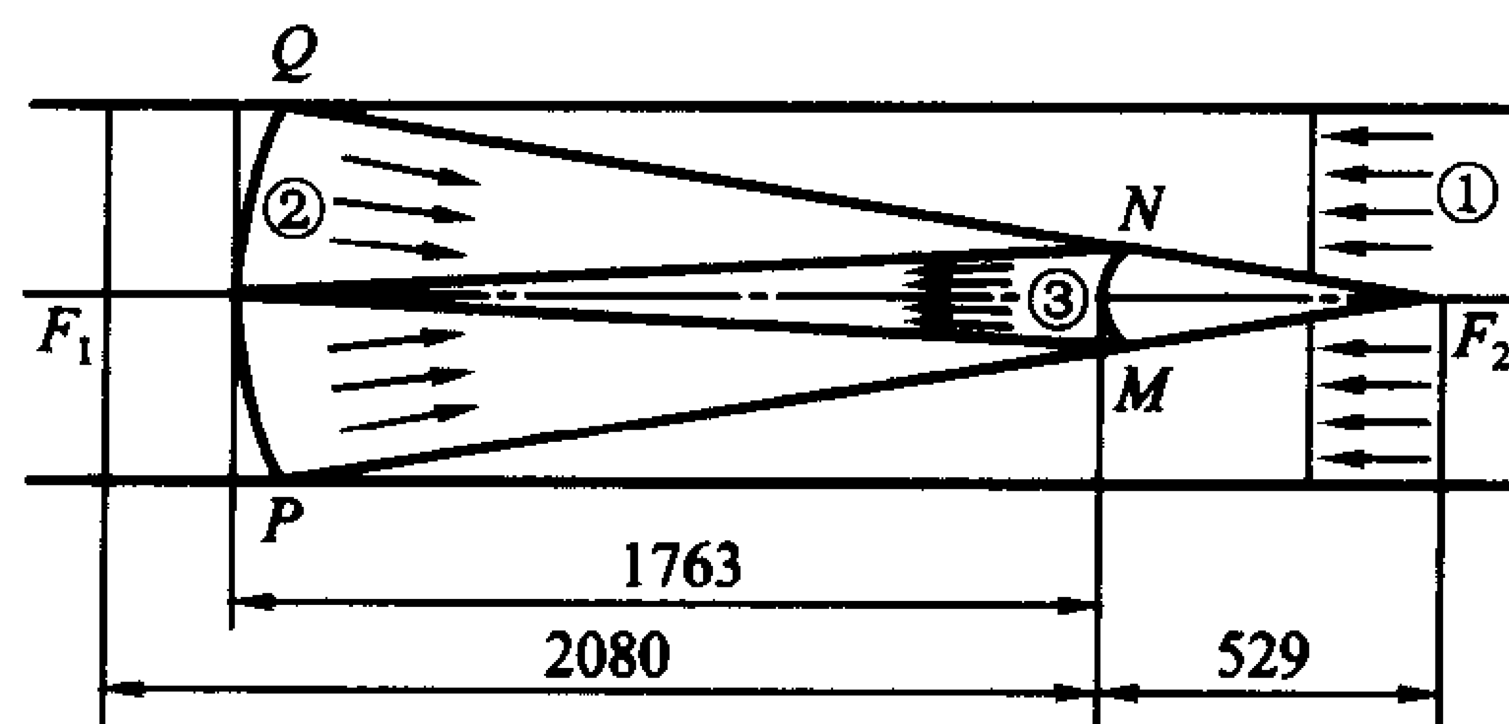


图 8-8

这样，依通常约定，将天体发出的光线视为平行光线①，根据抛物线光学性质，则光线①经抛物线 PQ 反射后，反射光线②就都聚交于抛物线的焦点 F_2 上；因为 F_2 是双曲线的虚焦点，根据双曲线的光学性质，光线②经双曲线 MN 反射后，反射光线③就都聚交于双曲线的另一个焦点 F_1 上，在点 F_1 处可对天体观测得很清楚.

(3) 椭圆、抛物线、双曲线的其他应用

由抛物线产生的平移曲面，常被应用到一些建筑物的屋顶上. 例如北京网球馆的屋面形状是椭圆抛物面，如图 8-9. 而某些火车站或体育馆的屋顶也做成椭圆抛物面的形状，如图 8-10. 这些椭圆抛物面的屋顶看上去形状有点像球面，因而大方匀称. 但在实际施工时，浇制椭圆抛物面的屋顶要比浇制球面方便. 这是因为预制水泥构件时要先做模板，而用一组平行平面去截球面，截面圆的半径是变化的，所以浇制球面时各块模板的形状互不相同，要做多块模板. 而椭圆抛物面或双曲抛物面由于是平移曲面，所以浇制时每块模板的形状和大小都是完全相同的抛物线，这样就方便多了.

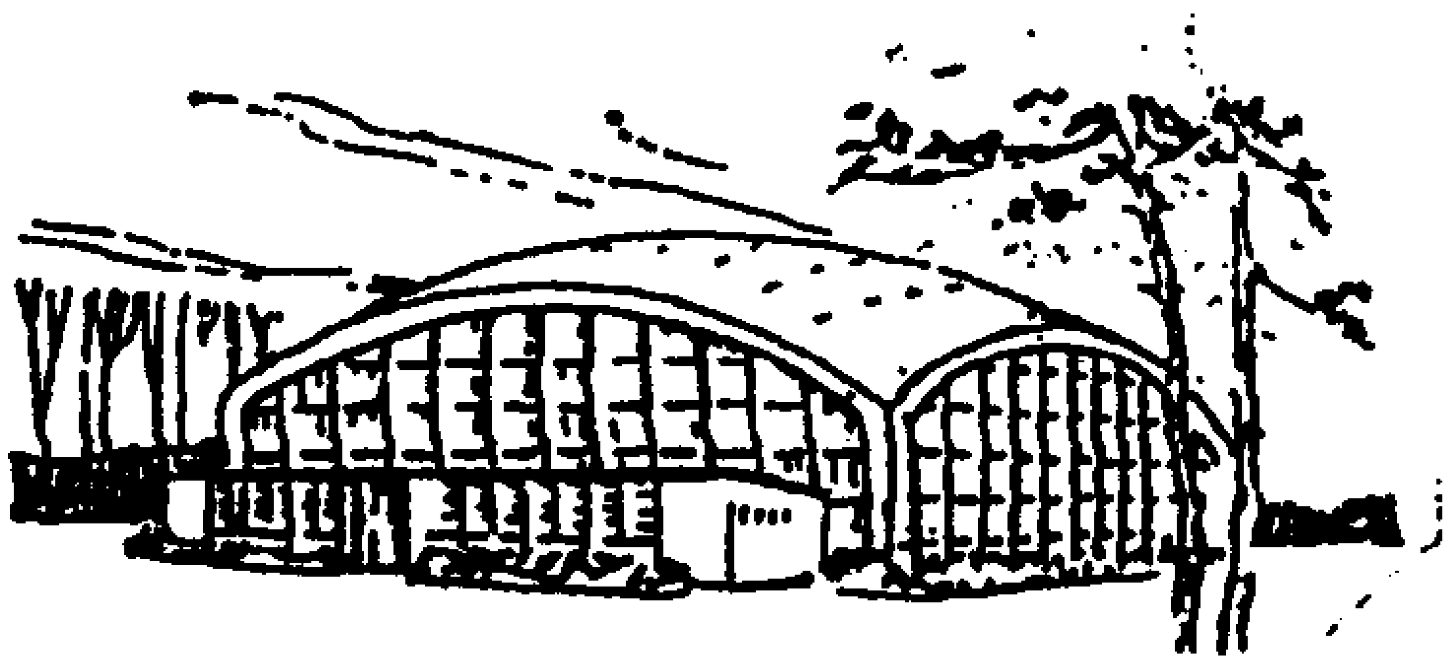


图 8-9

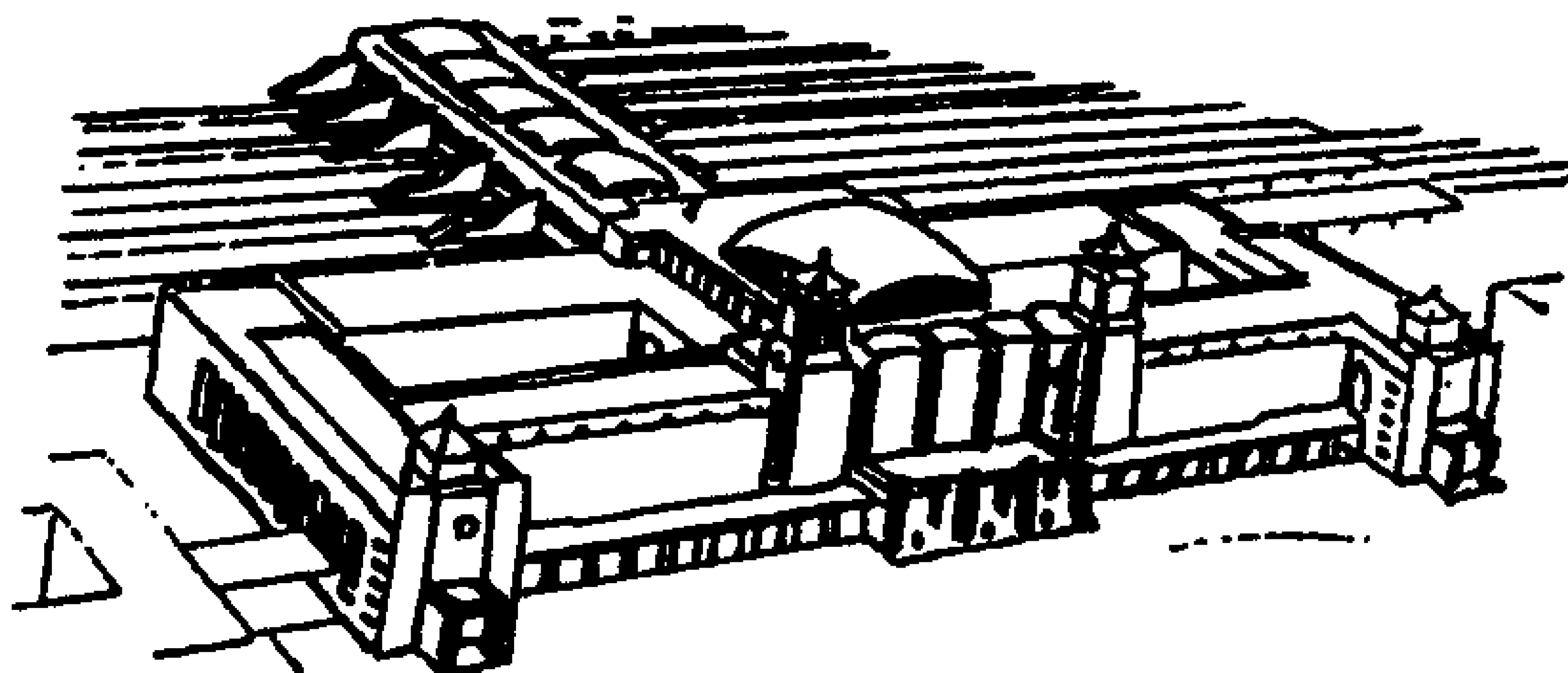


图 8-10

第七节 解析几何例题求解与点评

1. 直线与圆

例 1 如图 8-11，在正三角形 ABC 中，D、E 分别在 AB 和 BC 上，且 $AD=\frac{1}{3}AB$，$BE=\frac{1}{3}BC$，AE 和 CD 交于点 P，试问直线 BP 和 CP 的位置关系怎样，为什么？

解 猜想：$BP\perp CP$.

以 AB 所在直线为 x 轴，AB 中点为原点，建立直角坐标系. 设 $A(-a,0)$，$B(a,0)$，则 $C(0,\sqrt{3}a)$，$D\left(-\frac{a}{3},0\right)$，$E\left(\frac{2a}{3},\frac{\sqrt{3}a}{3}\right)$.

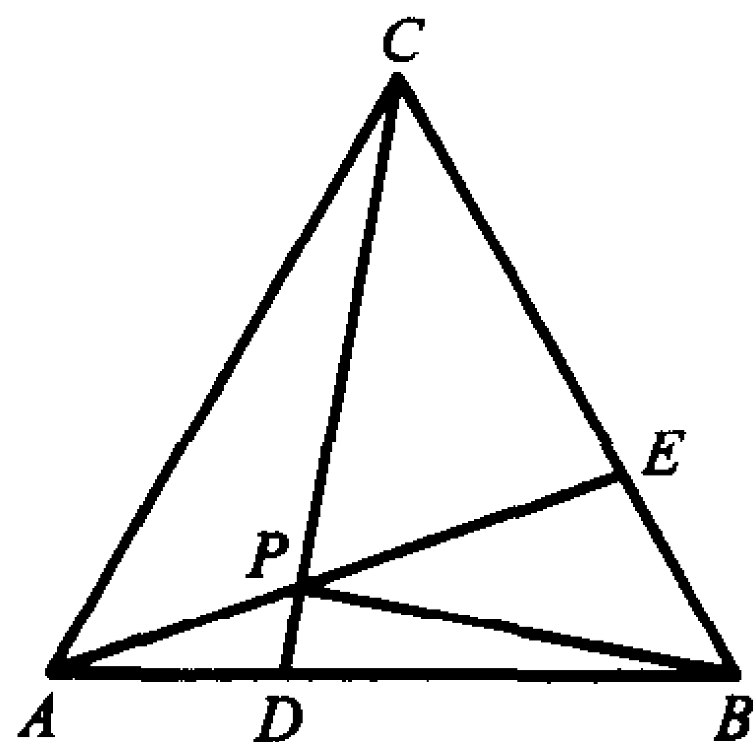


图 8 - 11

所以 $\overrightarrow{AE}=\left(\frac{5a}{3},\frac{\sqrt{3}a}{3}\right)$，$\overrightarrow{CD}=\left(-\frac{a}{3},-\sqrt{3}a\right)$

直线 AE、CD 的一个法向量分别为

$$\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}a,\frac{5a}{3}\right),\left(\sqrt{3}a,-\frac{a}{3}\right).$$

由此得直线 AE 的方程为

$$-\frac{\sqrt{3}}{3}a(x+a)+\frac{5a}{3}y=0,\text{即}\sqrt{3}x-5y+\sqrt{3}a=0.$$

直线 CD 的方程为

$$\sqrt{3}ax-\frac{a}{3}(y-\sqrt{3}a)=0,\text{即 }3\sqrt{3}x-y+\sqrt{3}a=0.$$

$$\text{由}\begin{cases}\sqrt{3}x-5y+\sqrt{3}a=0,\\3\sqrt{3}x-y+\sqrt{3}a=0,\end{cases}\text{解得}\begin{cases}x=-\frac{2}{7}a,\\y=\frac{\sqrt{3}}{7}a,\end{cases}$$

即得点 P 的坐标为 $\left(-\frac{2}{7}a,\frac{\sqrt{3}}{7}a\right)$.

于是得 $\overrightarrow{BP}=\left(-\frac{9}{7}a,\frac{\sqrt{3}}{7}a\right)$，$\overrightarrow{CP}=\left(-\frac{2}{7}a,-\frac{6\sqrt{3}}{7}a\right)$，

且有

$$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CP}=\left(-\frac{9}{7}a\right)\cdot\left(-\frac{2}{7}a\right)+\frac{\sqrt{3}}{7}a\cdot\left(-\frac{6\sqrt{3}}{7}a\right)=0,$$

所以直线 BP 和 CP 互相垂直.

点评 凭直觉猜测 $BP\perp CP$，欲证这一结论的关键是求点 P 的坐标. 为此，须建立直线 AE 和 CD 的方程. 这样，就必须先建立平面直角坐标系. 因此，运用解析法证明本例就是顺理成章的事了.

这里的证明，应用了“$BP\perp CP\Leftrightarrow\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CP}=0\Leftrightarrow\left(-\frac{9}{7}a\right)\cdot\left(-\frac{2a}{7}\right)+\frac{\sqrt{3}}{7}a\cdot$

$\left(-\frac{6\sqrt{3}}{7}a\right)=0$”，这是常用的方法，它使“形”与“数”结合，沟通了用代数研究几何的渠道. 一般地，设 $M(a,b)$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则

$$MA\perp MB\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0\Leftrightarrow(x_1-a)(x_2-b)+(y_1-b)(y_2-b)=0.$$

当然，求得点 P 的坐标后，运用勾股定理证明 $BP\perp CP$，在这里也是方便的，读者不妨一试.

例 2　对于平面上任意一点 P，当点 Q 在线段 AB 上运动时，称 $|PQ|$ 的最小值为点 P 与线段 AB 的距离. 如图 8－12，已知定点 $A(1,-2)$ 和 $B(4,1)$，动点 P 在 x 轴上运动，写出点 $P(t,0)$ 到线段 AB 的距离 h 关于 t 的函数关系式.

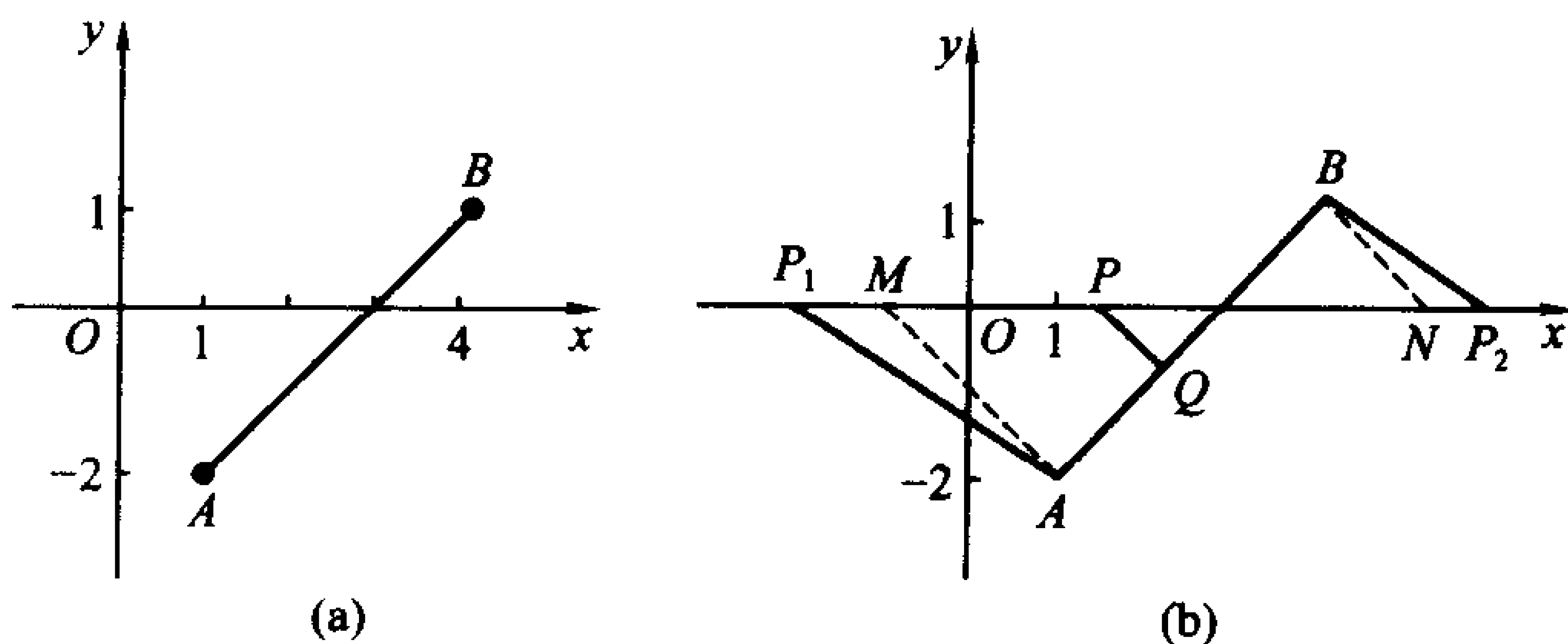


图 8－12

解法 1　由题设，易得线段 AB 的方程为

$$x-y-3=0(1\leqslant x\leqslant 4).$$

故可设线段 AB 上的任一点 Q 的坐标为 $(x,x-3)$，则

$$|PQ|=\sqrt{(t-x)^2+(x-3)^2}.$$

记 $f(x)=\sqrt{(t-x)^2+(x-3)^2}=\sqrt{2\left(x-\frac{t+3}{2}\right)^2+\left(\frac{t-3}{\sqrt{2}}\right)^2}\quad(1\leqslant x\leqslant 4)$，

当 $1\leqslant\frac{t+3}{2}\leqslant 4$，即 $-1\leqslant t\leqslant 5$ 时，得

$$|PQ|_{\min}=f\left(\frac{t+3}{2}\right)=\frac{|t-3|}{\sqrt{2}};$$

当 $\frac{t+3}{2}>4$，即 $t>5$ 时，$f(x)$ 在 $[1,4]$ 上单调递减，得

$$|PQ|_{\min}=f(4)=\sqrt{(t-4)^2+1};$$

当 $\frac{t+3}{2}<1$，即 $t<-1$ 时，$f(x)$ 在 $[1,4]$ 上单调递增，得

$$|PQ|_{\min}=f(1)=\sqrt{(t-1)^2+4}.$$

综上所述，
$$h(t)=\begin{cases}\sqrt{(t-1)^2+4}, & t<-1;\\ \dfrac{|t-3|}{\sqrt{2}}, & -1\leqslant t\leqslant 5;\\ \sqrt{(t-4)^2+1}, & t>5.\end{cases}$$

解法 2 由题设，易得线段 AB 的方程为

$$x-y-3=0(1\leqslant x\leqslant 4).$$

过 A、B 分别作 AB 的垂线交 x 轴于 M、N(如图 8-12(b))，易得直线 AM、BN 的方程分别为

$$x+y+1=0, x+y-5=0.$$

令 $y=0$，得 M、N 的坐标分别为 $M(-1,0)$，$N(5,0)$.

当 $t<-1$ 时，即点 P 在点 M 左侧时，由定义得

$$|PQ|_{\min}=|P_1A|=\sqrt{(t-1)^2+4};$$

当 $-1\leqslant t\leqslant 5$，即点 P 在线段 MN 上时，由点到直线的距离公式，得

$$|PQ|_{\min}=\frac{|t-3|}{\sqrt{2}};$$

当 $t>5$ 时，即点 P 在点 N 右侧时，由定义得

$$|PQ|_{\min}=|P_2B|=\sqrt{(t-4)^2+1}.$$

综上所述，
$$h(t)=\begin{cases}\sqrt{(t-1)^2+4}, & t<-1;\\ \dfrac{|t-3|}{\sqrt{2}}, & -1\leqslant t\leqslant 5;\\ \sqrt{(t-4)^2+1}, & t>5.\end{cases}$$

点评 本例以“点 P 与线段 AB 的距离”为载体，考查数学学习的能力. 在审题时，应画出符合题设条件的图形，且“动中窥静，静图动观”，深入分析图形的演变过程，找到新概念与“点到直线的距离”的联系和区别：当点在线段 MN 上运动时，“点 P 与线段 AB 的距离”即是“点到直线 AB 的距离”；当点 P 在 M 左侧(或 N 右侧)时，“点 P 与线段 AB 的距离”转化为点 P 与点 A(或 B)之间的距离. 这样，解法 1 和解法 2 都容易想到了. 因此，解本例的关键是仔细阅读，抓住信息，丰富感性认识，以透彻理解.

例 3 小河同侧有两个村庄 A、B，两村庄计划在河上共建一水电站发电供两村使用. 已知 A、B 两村到河边的垂直距离分别为 300 m 和 700 m，且两村相距

500 m,问水电站建于何处,送电到两村的电线用料最省?

解　以小河 l 所在直线为 x 轴,以 A 在 l 上射影 O 为原点,建立直角坐标系,如图 8-13. 则点 A 的坐标为(0,300).

设点 B 的坐标为$(x,700)$,点 B 在 y 轴上的射影为 H,则

$x=|BH|=\sqrt{AB^2-AH^2}=\sqrt{500^2-400^2}=300$,

故点 B 的坐标为(300,700).

设点 A 关于 x 轴的对称点为 $A'(0,-300)$,则

$|PA|+|PB|=|PA'|+|PB|\geqslant|A'B|$,

当且仅当 A'、P、B 三点共线时,上式中取等号,即 $|PA|+|PB|$ 为最小. 故水电站应建在直

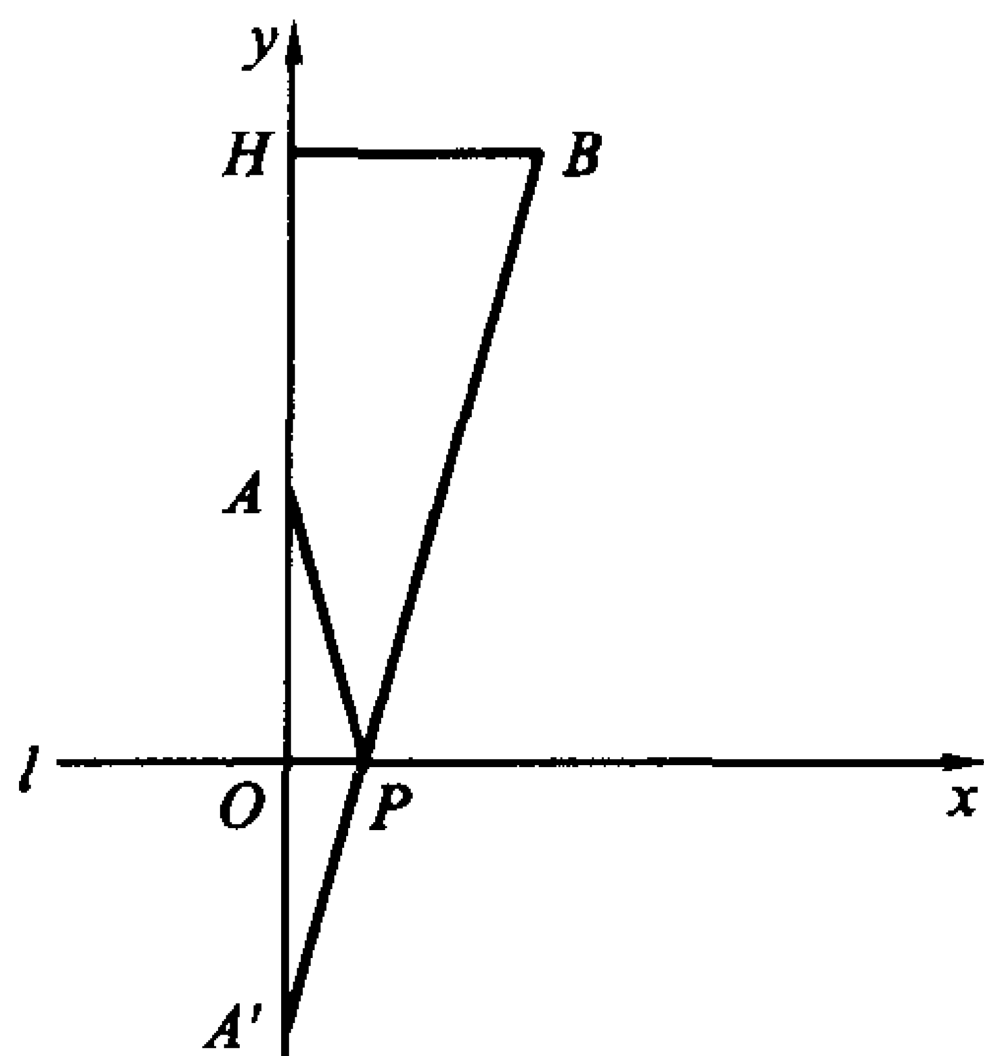


图 8-13

线 $A'B$ 和 x 轴的交点上. 直线 $A'B$ 的一个方向向量为 $\overrightarrow{A'B}=(300,1\,000)$,其方程为

$$\frac{y-700}{1\,000}=\frac{x-300}{300},\text{即 } y=\frac{10}{3}x-300.$$

令 $y=0$,得 $x=90$,交点为 $P(90,0)$. 故水电站应建在河边距 A 到小河最近点 O 的 90 m 处用料最省.

点评　对实际的应用问题,应理清题意,建立适当的平面直角坐标系,找出相关量的关系,利用转化的思想解决问题,本例即转化为求直线 $A'B$ 和 l 的交点 P 的坐标的问题.

本例利用对称的方法,使问题的解决既直观又简捷. 若利用求点 $P(x,0)$ 到 A、B 的距离和 $|PA|+|PB|=\sqrt{x^2+300^2}+\sqrt{(x-300)^2+700^2}$ 的最小值,这固然容易想到,但计算颇为繁琐. 读者不妨试试.

例 4　已知定点 $A(0,1)$,$B(0,-1)$,$C(1,0)$,动点 P 满足 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=m|\overrightarrow{CP}|^2$.

(1) 求动点 P 的轨迹;

(2) 当 $m=\dfrac{1}{2}$ 时,求 $|\overrightarrow{AP}+2\overrightarrow{BP}|$ 的最大值和最小值.

解　(1) 设动点 P 的坐标为 (x,y),则

$$\overrightarrow{AP}=(x,y-1),\overrightarrow{BP}=(x,y+1),\overrightarrow{CP}=(x-1,y)$$

因为
$$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=m|\overrightarrow{CP}|^2,$$

所以
$$x^2+(y-1)(y+1)=m[(x-1)^2+y^2],$$

即 $$(1-m)x^2+(1-m)y^2+2mx-m-1=0. \quad (1)$$

若 $m=1$，则方程(1)为 $x=1$，表示过点(1,0)且平行于 y 轴的直线；

若 $m\neq 1$，则方程(1)可化为

$$\left(x+\frac{m}{1-m}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{1-m}\right)^2,$$

表示以 $\left(\frac{m}{m-1},0\right)$ 为圆心，以 $\frac{1}{|m-1|}$ 为半径的圆.

(2) 当 $m=\frac{1}{2}$ 时，方程(1)化为

$$x^2+y^2+2x-3=0, 即 (x+1)^2+y^2=4.$$

因为 $\overrightarrow{AP}+2\overrightarrow{BP}=(x,y-1)+2(x,y+1)=(3x,3y+1)$，

所以 $|\overrightarrow{AP}+2\overrightarrow{BP}|=\sqrt{9x^2+9y^2+6y+1}$.

又 $x^2+y^2=3-2x$，所以 $|\overrightarrow{AP}+2\overrightarrow{BP}|=\sqrt{-18x+6y+28}$，

而点 $P(x,y)$ 在圆 $(x+1)^2+y^2=4$ 上，

故令 $x=-1+2\cos\theta$，$y=2\sin\theta$，则

$$-18x+6y+28=46-36\cos\theta+12\sin\theta$$
$$=46-12\sqrt{10}\cos(\theta+\varphi)\in[46-12\sqrt{10},46+12\sqrt{10}].$$

所以 $|\overrightarrow{AP}+2\overrightarrow{BP}|$ 的最大值为 $\sqrt{46+12\sqrt{10}}=6+\sqrt{10}$，最小值为 $\sqrt{46-12\sqrt{10}}=6-\sqrt{10}$.

点评　第(1)题运用向量的基本运算和方程的思想，求出点 P 满足的轨迹方程，并据此判断方程所表示的曲线. 在判断过程中，必须根据方程 $Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0$ 表示圆的充要条件是"$A=B\neq 0$，$C=0$ 且 $D^2+E^2-4AF>0$"进行分类讨论，否则，将忽视"$m=1$"这一特殊情况.

第(2)题考查了圆的方程的应用，利用圆的普通方程和参数方程，将所求式子表达为只含一个变量的函数，从而将问题转化为求函数的最值. 在求最值的问题中，这一方法常常用到，应引起足够的重视. 在转化过程中，应注意由圆锥曲线的几何性质限制变量的范围.

例 5　自点 $A(-3,3)$ 发出的光线 l 射到 x 轴上，被 x 轴反射后，其反射光线 l' 与圆 $C: x^2+y^2-4x-4y+7=0$ 相切，求光线 l 所在直线的方程.

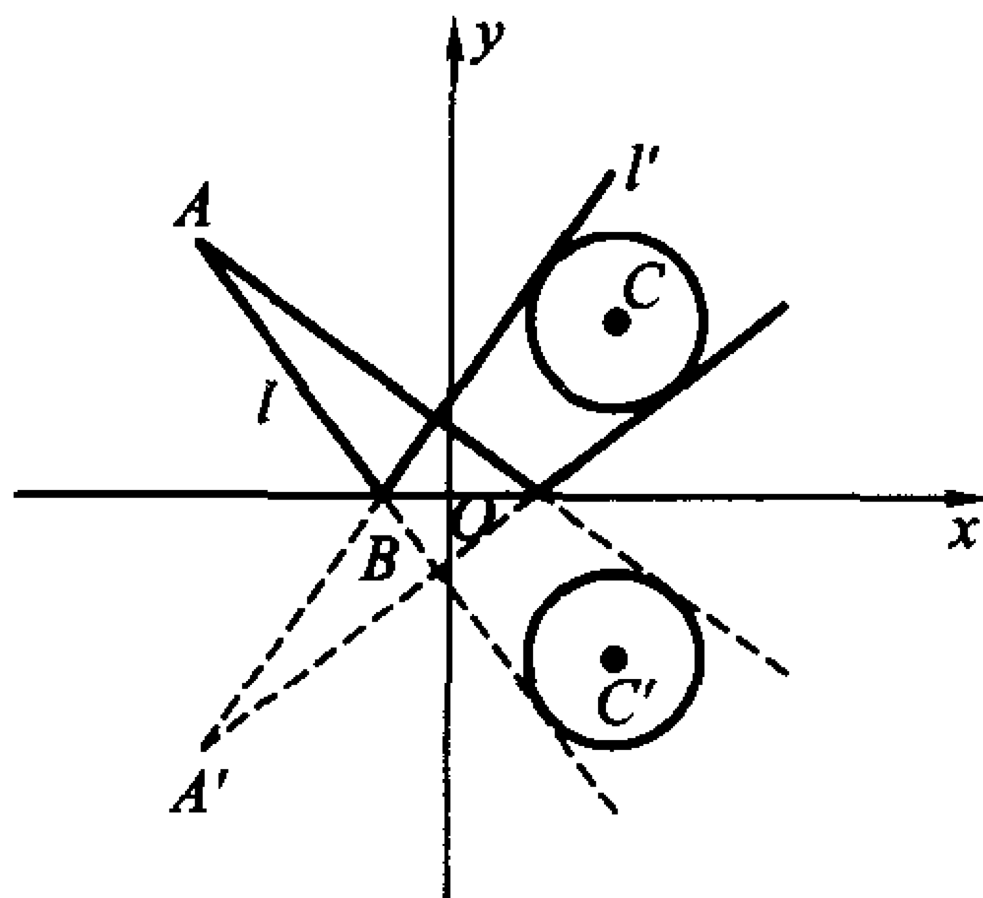


图 8-14

解法 1　如图 8-14，设入射光线 l 与 x 轴交于点 $B(b,0)$，则直线 AB 的斜率为 $k_{AB}=\frac{-3}{b+3}$.

由光的反射定律，知 l' 的斜率为 $\frac{3}{b+3}$，其方程为

$$y=\frac{3}{b+3}(x-b)，即\ 3x-(b+3)y-3b=0.$$

圆 C 的方程可化为 $(x-2)^2+(y-2)^2=1$，其圆心为 $(2,2)$，半径 $r=1$.
由题意，知直线 l' 与圆 C 相切，于是得

$$\frac{|6-2(b+3)-3b|}{\sqrt{9+(b+3)^2}}=1.$$

化简得 $4b^2-b-3=0$，解得 $b_1=1$ 或 $b_2=-\frac{3}{4}$，从而有 $k_1=-\frac{3}{4}$ 或 $k_2=-\frac{4}{3}$.
所以，光线 l 所在直线的方程为

$$3x+4y-3=0\ 或\ 4x+3y+3=0.$$

解法 2　圆 C 的方程为 $(x-2)^2+(y-2)^2=1$.
圆 C 关于 x 轴对称的圆 C' 的方程为

$$(x-2)^2+(y+2)^2=1.$$

设入射光线 l 所在直线的方程为

$$y-3=k(x+3)，即\ kx-y+3k+3=0.$$

如图 8-14，直线 l 与圆 C' 相切，则圆心 $C'(2,-2)$ 到 l 的距离等于 1，即

$$\frac{|2k+2+3k+3|}{\sqrt{1+k^2}}=1,$$

解得

$$k_1=-\frac{3}{4}\ 或\ k_2=-\frac{4}{3}.$$

所以，光线 l 所在直线的方程为

$$3x+4y-3=0\ 或\ 4x+3y+3=0.$$

解法 3　设 l 的方程为 $y-3=k(x+3)$，则可设 l' 的方程为 $y=-kx+b(k\neq0)$.
因为 l 与 l' 相交于 x 轴上同一点，所以两直线在 x 轴上的截距相等，即得

$$-3-\frac{3}{k}=\frac{b}{k}.\qquad(1)$$

又 l' 与已知圆 C 相切，故有

$$\frac{|2k+2-b|}{\sqrt{1+k^2}}=1.\qquad(2)$$

由(1)、(2)，可得 $\frac{|5k+5|}{\sqrt{1+k^2}}=1$，解得 $k_1=-\frac{3}{4}$ 或 $k_2=-\frac{4}{3}$.

所以，光线 l 所在直线的方程为 $3x+4y-3=0$ 或 $4x+3y+3=0$.

点评　解本例的三种方法都是方程思想方法的典型应用. 解法 1 中，从光线 l 与 x 轴的交点着手，设其坐标为 $B(b,0)$，然后利用圆的切线的性质，列出以 b 为未知数的方程，进而求出 l 的方程. 解法 2 则是设光线 l 的斜率 k 为待定系数，列出以 k 为未知数的方程进行求解，当然，解法 2 还应用了数形结合的思想，并利用对称原理，将问题进行了转化，使解题过程较为简捷. 解法 3 中设了两个未知数 k 和 b，根据 l、l' 与 x 轴交于同一点，增加了一个方程，体现了方程思想在实际运用中的灵活性.

例 6　求函数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-(x+2)^2}+3}{x-1}$ 的值域.

解　设 $y=\sqrt{1-(x+2)^2}$，即 $(x+2)^2+y^2=1(y\geqslant 0)$.

此时原函数可变为 $\begin{cases}(x+2)^2+y^2=1(y\geqslant 0),\\ f(x)=\dfrac{y-(-3)}{x-1}.\end{cases}$

于是问题可以转化为求半圆弧 $(x+2)^2+y^2=1(y\geqslant 0)$ 上的动点 M 到定点 $A(1,-3)$ 连线斜率的取值范围.

如图 8 - 15 所示，当点 M 运动到 $B(-3,0)$ 时，斜率取得最大值

$$k_{AB}=\frac{-3-0}{1-(-3)}=-\frac{3}{4}.$$

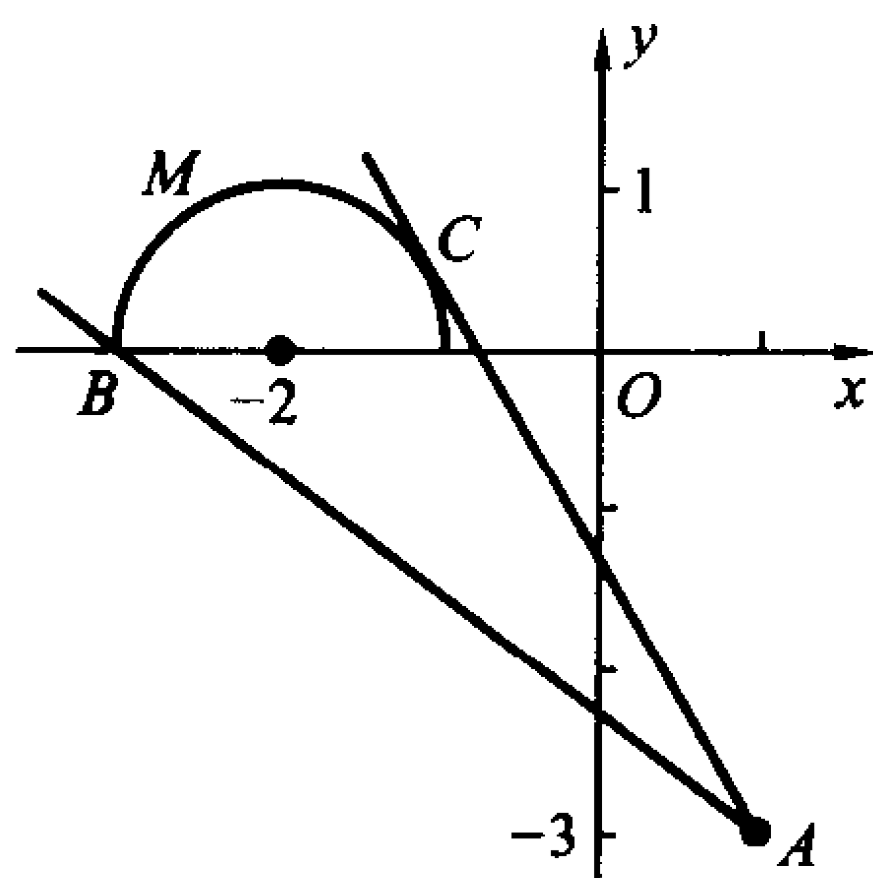


图 8 - 15

当直线 AM 与半圆弧相切于点 C 时，斜率取得最小值 k_{AC}.

设直线 AC 的方程为 $y+3=k(x-1)$，则半圆圆心 $(-2,0)$ 到 AC 的距离为 1，即

$$\frac{|-2k-0-k-3|}{\sqrt{1+k^2}}=\frac{|3k+3|}{\sqrt{1+k^2}}=1,$$

化简，得 $$4k^2+9k+4=0,$$

解得 $$k=\frac{-9\pm\sqrt{17}}{8}.$$

又 $k_{AC}<k_{AB}$，所以 $k_{AC}=-\dfrac{9+\sqrt{17}}{8}$.

故函数 $f(x)$ 的值域为 $\left[-\dfrac{9+\sqrt{17}}{8},-\dfrac{3}{4}\right]$.

点评 解本例的关键是观察和联想，在深入观察原题的结构形式的基础上，去探索、去联想与之相应的曲线：从局部 $y=\sqrt{1-(x+2)^2}$ 得出半圆 $(x+2)^2+y^2=1(y\geqslant 0)$，由整体 $f(x)$ 联想直线 AM 的斜率，即将代数中求函数的值域问题化归为半圆与直线的位置关系问题，显得既直观，又简捷. 同时要提醒的是，在构造几何图形时始终要注意数据的实际背景，例如在求得 $k=\dfrac{-9\pm\sqrt{17}}{8}$ 后，必须结合图形，利用 $k_{AC}<k_{AB}$ 进行取舍 $\left(\text{想一想：}k=-\dfrac{9-\sqrt{17}}{8}\text{的几何意义是什么？}\right)$.

作为本例方法的运用，请读者做下面的练习：

求函数 $y=\sqrt{2x+2}+\sqrt{1-x}$ 的值域.

2. 椭圆、双曲线与抛物线

例 7 椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 的焦点为 F_1、F_2，点 P 为其上动点. 当 $\angle F_1PF_2$ 为钝角时，求点 P 的横坐标的取值范围.

解法 1 易得 $F_1(-\sqrt{5},0)$，$F_2(\sqrt{5},0)$，以 F_1F_2 为直径的圆的方程为 $x^2+y^2=5$，它与椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 交于点 P_1、P_2（在 x 轴上方）. 如图 8-16，对于在圆的劣弧 $\overset{\frown}{P_1P_2}$ 上的动点 M，都有

$$\angle F_1MF_2=90°,$$

因此，在圆内且在椭圆上的 P_1、P_2 之间的点 P，均有

$$\angle F_1PF_2>\angle F_1MF_2，\text{即}\angle F_1PF_2\text{ 为钝角.}$$

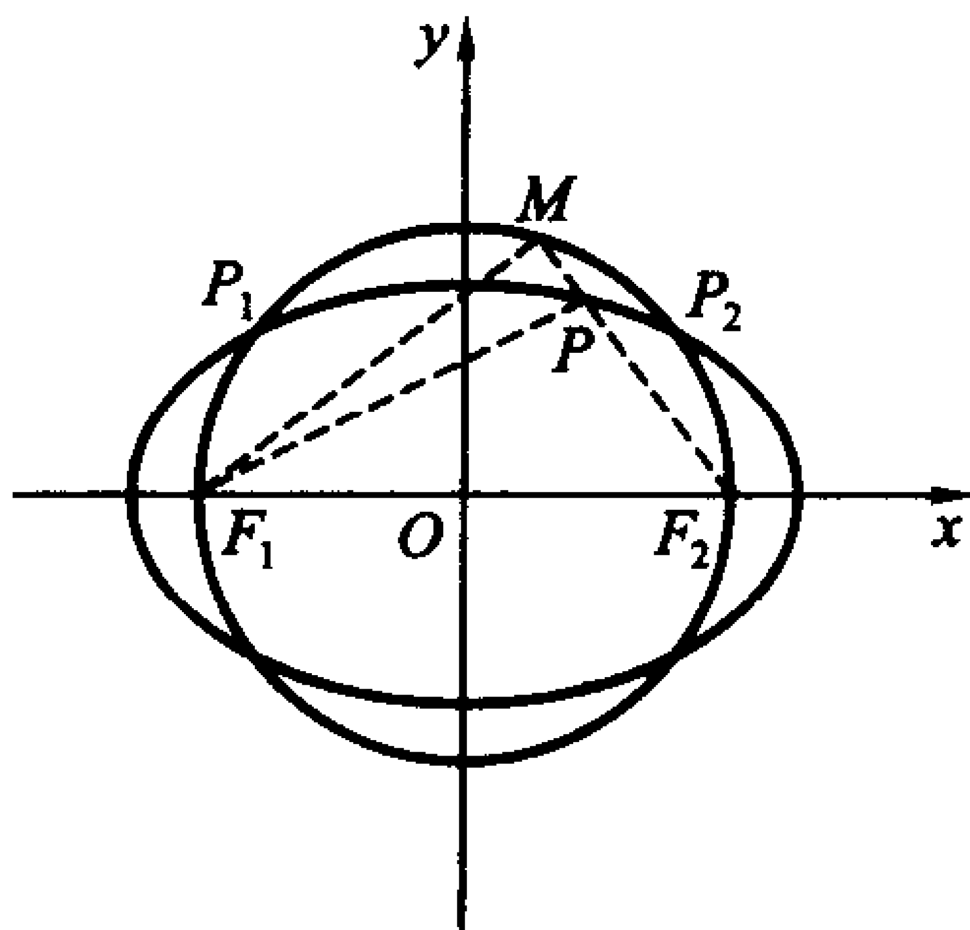


图 8-16

由方程组 $\begin{cases}\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1,\\ x^2+y^2=5\end{cases}$ 消去 y^2，解得 $x=\pm\dfrac{3}{\sqrt{5}}$，即得点 P_1、P_2 的横坐标分别为 $-\dfrac{3}{\sqrt{5}}$、$\dfrac{3}{\sqrt{5}}$.

所以，使 $\angle F_1PF_2$ 为钝角的点 P 的横坐标取值范围为

$$\left(-\frac{3\sqrt{5}}{5},\frac{3\sqrt{5}}{5}\right).$$

解法 2 设点 P 的坐标为 (x_P,y_P)，则

$$y_P^2=4-\frac{4}{9}x_P^2. \qquad (1)$$

又焦点 F_1、F_2 的坐标是 $F_1(-\sqrt{5},0)$，$F_2(\sqrt{5},0)$，故有

$$\overrightarrow{PF_1}=(-\sqrt{5}-x_P,-y_P),\overrightarrow{PF_2}=(\sqrt{5}-x_P,-y_P),$$

因为$\angle F_1PF_2$为钝角，所以$\overrightarrow{PF_1}\cdot\overrightarrow{PF_2}<0$，即

$$(-\sqrt{5}-x_P),(\sqrt{5}-x_P)+(-y_P)(-y_P)<0,$$

化简得
$$x_P^2+y_P^2<5. \tag{2}$$

由(1)、(2)，得 $4-\frac{4}{9}x_P^2+x_P^2<5$，即 $5x_P^2<9$.

解得
$$-\frac{3\sqrt{5}}{5}<x_P<\frac{3\sqrt{5}}{5}.$$

所以，使$\angle F_1PF_2$为钝角的点P的横坐标的取值范围是

$$\left(-\frac{3\sqrt{5}}{5},\frac{3\sqrt{5}}{5}\right).$$

解法 3　设点P的横坐标为x_P，$|PF_1|=r_1$，$|PF_2|=r_2$，

则$|F_1F_2|=2\sqrt{5}$，椭圆离心率$e=\frac{\sqrt{5}}{3}$，且有

$$r_1=3+\frac{\sqrt{5}}{3}x_P,r_2=3-\frac{\sqrt{5}}{3}x_P.$$

在$\triangle F_1PF_2$中，由余弦定理可知

$$\cos\angle F_1PF_2=\frac{r_1^2+r_2^2-|F_1F_2|^2}{2r_1r_2}<0,$$

所以
$$r_1^2+r_2^2<|F_1F_2|^2,$$

即
$$\left(3+\frac{\sqrt{5}}{3}x_P\right)^2+\left(3-\frac{\sqrt{5}}{3}x_P\right)^2<20.$$

解得
$$-\frac{3\sqrt{5}}{5}<x_P<\frac{3\sqrt{5}}{5},$$

所以，使$\angle F_1PF_2$为钝角的点P的横坐标的取值范围是

$$\left(-\frac{3\sqrt{5}}{5},\frac{3\sqrt{5}}{5}\right).$$

点评　本例的三种解法各有特点，解法1是以数形结合的思想方法为主，伴以方程的思想方法求解；解法2、解法3则是目标明确，直奔主题，即建立关于x_P的不等式进行求解，其中解法2是利用向量知识建立关于x_P的不等式，显得简捷；解法3则是利用余弦定理来建立关于x_P的不等式，显然较为直观，容易想到.

例 8　设椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的一个顶点为$A(0,-1)$，右焦点到直线$x-y+2\sqrt{2}=0$的距离为3.

（1）求椭圆的方程；

（2）能否找到斜率为$k(k\neq0)$的直线l，使l与椭圆交于M、N两点，且$|AM|=|AN|$.若存在，求出k的取值范围；若不存在，说明其理由.

解　（1）由$A(0,-1)$为顶点，知$b=1$，

设右焦点的坐标为$F(c,0)$，则

$$\frac{|c+2\sqrt{2}|}{\sqrt{2}}=3.$$

解得$c=\sqrt{2}$或$c=-5\sqrt{2}$（舍去）.

因此$a^2=b^2+c^2=3$，所求椭圆方程为

$$\frac{x^2}{3}+y^2=1.$$

（2）假设存在符合题设条件的直线l，并设l的方程为$y=kx+m$，代入$x^2+3y^2=3$中并整理得

$$(1+3k^2)x^2+6kmx+3m^2-3=0.$$

令$\Delta=36k^2m^2-12(m^2-1)(3k^2+1)>0$，得

$$m^2<3k^2+1.$$

设MN的中点为$P(x_0,y_0)$，则

$$x_0=\frac{-3km}{1+3k^2},y_0=kx_0+m=\frac{m}{1+3k^2}.$$

由条件$|AM|=|AN|$，知A在线段MN的垂直平分线上，所以$MN\perp AP$，由此得

$$\frac{\frac{m}{1+3k^2}+1}{\frac{-3km}{1+3k^2}-0}\cdot k=-1,$$

即
$$3m=1+3k^2+m,$$

解得$m=\frac{1}{2}(1+3k^2)$，并代入$3k^2+1>m^2$中，得

$$3k^2+1>\left(\frac{1+3k^2}{2}\right)^2,$$

化简得$k^2<1$，即$-1<k<1(k\neq0)$，

所以，存在符合题设条件的直线l，且l的斜率

$$k\in(-1,0)\cup(0,1).$$

点评　解本例(1)用的是待定系数法.

本例的(2)是探索研究性题型，解法(2)值得注意的有三点：首先是假设存在符合题设条件的直线l，这是解题的切入点，据此，就可根据题设条件和假设条件

进行演绎推理；其次是及时进行命题的等价转换，把$|AM|=|AN|$化为$MN\perp AP$，这样，就避免了求线段长，简化了计算；第三，对含双参数m、k的讨论，应注意分离出要讨论的主要元素，本例中就是用k表示m，及时代入$m^2<1+3k^2$，建立关于只含k的不等式，使解题过程简便.

例 9　(1) 求证：以椭圆的任一焦半径为直径的圆与以长轴为直径的圆相内切；

(2) 就双曲线构造与问题(1)相类似的命题，并证明给出的命题是正确的.

证明　(1) 设F_1、F_2为椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左、右焦点，$P$为这椭圆上的任意一点，由椭圆定义知

$$|PF_1|+|PF_2|=2a.$$

如图 8－17，设以$|PF_2|$为直径的圆的圆心为M，O为原点，则有

$$|OM|=\frac{1}{2}|PF_1|=\frac{1}{2}(2a-|PF_2|)$$

$$=a-\frac{1}{2}|PF_2|=a-|PM|.$$

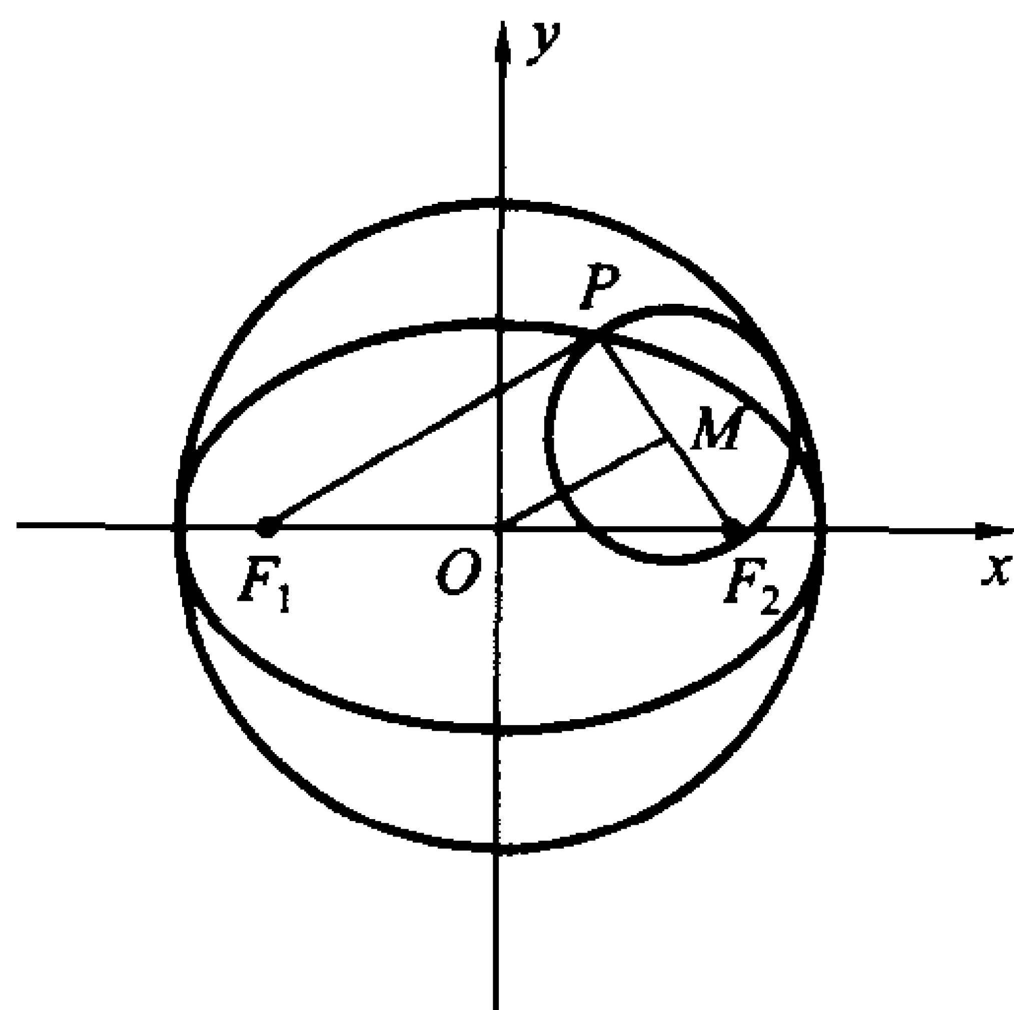


图 8－17

因此，两圆的圆心距$|OM|$等于圆O的半径a与圆M的半径$|PM|$之差. 故两圆相内切.

(2) 相应的命题：以双曲线的任一焦半径为直径的圆心与以实轴为直径的圆相切.

证明　设F_1、F_2为双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的左、右焦点.

如图 8－18，不妨设P为双曲线右分支上任意一点，由双曲线定义知

$$|PF_1|-|PF_2|=2a.$$

在$\triangle PF_1F_2$中，设M_1、M_2分别为边PF_1、PF_2的中点，所以

$$|OM_1|=\frac{1}{2}|PF_2|=\frac{1}{2}(|PF_1|-2a)$$

$$=\frac{1}{2}|PF_1|-a.$$

故以$|PF_1|$为直径的圆与以实轴为直径的圆相内切.

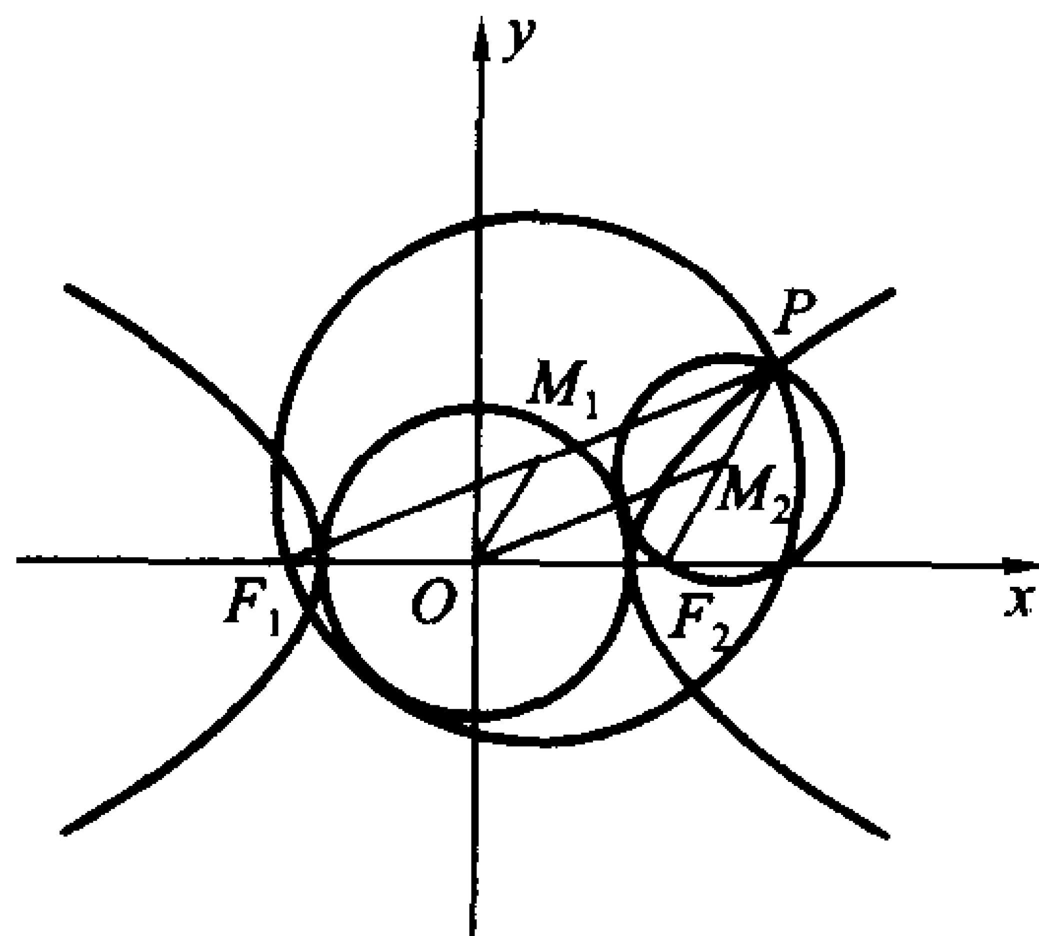


图 8－18

又$|OM_2|=\frac{1}{2}|PF_1|=\frac{1}{2}(|PF_2|+2a)=$

$\frac{1}{2}|PF_2|+a$.

故以$|PF_2|$为直径的圆与以实轴为直径的圆相外切.

若P为双曲线左分支上任一点,同理可证结论成立.

点评　本例是一道考查类比推理能力的习题.从上述可以看到,不仅相似命题的结构上可以类比,连相似命题的证题思路也可迁移类比,好像后者就是前者的"克隆".但从上述也可清楚看到,在椭圆中仅是内切一种情况,而在双曲线中却是外切与内切两种情况.可见,类比不是简单的形式上的模仿,它的更重要的作用是帮助我们发现.在解题过程中,类比的重要作用在于启迪思维,帮助我们寻找并发现解题思路,类比法更利于创新.但在类比过程中,我们必须注意:先类比合理猜想,再严密论证.

请读者再探索:对抛物线能否构造类似的命题?若能,命题是怎样的?如何证明?

例10　设双曲线$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{3}=1$的两个焦点分别为$F_1$、$F_2$,离心率为2.

(1) 求此双曲线的渐近线l_1、l_2的方程;

(2) 若A、B分别为l_1、l_2上的动点,且$2|AB|=5|F_1F_2|$,求线段AB的中点M的轨迹方程,并说明轨迹是什么曲线?

(3) 过点$N(1,0)$能否作出直线l,使l与双曲线交于P、Q两点,且$\angle POQ=90°$.若存在,求出l的方程;若不存在,请说明理由.

解　(1) 由题设,知$c^2=a^2+3$,$\frac{c}{a}=2$.

解得$a=1$,$c=2$,

所以双曲线方程为　$y^2-\frac{x^2}{3}=1$.

它的渐近线方程为　$y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$.

(2) 设点A、B、M的坐标分别为(x_1,y_1)、(x_2,y_2)、(x,y).

由$2|AB|=5|F_1F_2|$,得$|AB|=\frac{5}{2}\times 2c=10$,

所以　$|AB|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=10$.

又　$y_2=\frac{\sqrt{3}}{3}x_2$,$y_1=-\frac{\sqrt{3}}{3}x_1$,$x=\frac{1}{2}(x_1+x_2)$,$y=\frac{y_1+y_2}{2}$,

所以　$y_2+y_1=\frac{\sqrt{3}}{3}(x_2-x_1)$,$y_2-y_1=\frac{\sqrt{3}}{3}(x_2+x_1)$,

于是有 $$\sqrt{[\sqrt{3}(y_2+y_1)]^2+\left[\frac{\sqrt{3}}{3}(x_2+x_1)\right]^2}=10,$$

所以 $$3\cdot(2y)^2+\frac{1}{3}\cdot(2x)^2=100,$$

整理得 $$\frac{x^2}{75}+\frac{y^2}{\frac{25}{3}}=1.$$

故点 M 的轨迹是中心在原点、焦点在 x 轴上、长轴为 $10\sqrt{3}$、短轴长为 $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ 的椭圆.

(3) 假设存在直线 l,设它的方程为

$$x=my+1(m\in\mathbf{R}).$$

设 P、Q 的坐标为 $P(x_1,y_1)$、$Q(x_2,y_2)$.

由 $\angle POQ=\frac{\pi}{2}$ 得 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$,

所以 $x_1x_2+y_1y_2=0$,即 $(my_1+1)(my_2+1)+y_1y_2=0$.

整理得 $$(1+m^2)y_1y_2+m(y_1+y_2)+1=0. \quad (1)$$

由 $\begin{cases} y^2-\frac{x^2}{3}=1, \\ x=my+1, \end{cases}$ 得 $(3-m^2)y^2-2my-4=0$.

当 $\Delta=4m^2+16(3-m^2)>0$,即 $-2<m<2$ 时,

$$y_1+y_2=\frac{2m}{3-m^2},y_1y_2=\frac{-4}{3-m^2}. \quad (2)$$

将(2)代入(1),得

$$(1+m^2)\cdot\frac{-4}{3-m^2}+m\cdot\frac{2m}{3-m^2}+1=0,$$

化简得 $$3m^2+1=0.$$

此方程无实数解,故 m 不存在,即所求直线 l 不存在.

点评　解第(1)题运用了方程的思想.

解第(2)题时,在设出了点 A、B、M 的坐标,只是运用 $\frac{x_1+x_2}{2}=x$、$\frac{y_1+y_2}{2}=y$ 和题设条件,并利用 $2|AB|=5|F_1F_2|$ 建立了 x、y 之间的关系,并没有去求 A、B、M 这三点的坐标,这种设而不求、整体处理的方法,对于处理圆锥曲线中的"多点"问题特别有效,应予以重视.

第(3)题为探索研究性题型,这里应用了变换的思想方法,即先假设结论存在,且设 l 的方程为 $x=my+1$,然后利用"$OP\perp OQ\Leftrightarrow\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=0\Leftrightarrow x_1x_2+$

$y_1y_2=0$" 去建立关于 m 的方程，转而将 l 的是否存在化为关于 m 的方程是否有解的问题. 至于为什么设 l 的方程为 $x=my+1(m\in\mathbf{R})$，而不设为常见的点斜式，主要是为了避免讨论. 因为若以斜率为参数，则一定要讨论斜率存在和不存在两种情况，解题过程就较为复杂了.

例 11 设抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F，经过点 F 的直线交抛物线于 A、B 两点，点 C 在抛物线的准线上，且 $BC/\!/x$ 轴，证明直线 AC 经过原点.

证法 1 抛物线的焦点为 $F\left(\frac{p}{2},0\right)$，故经过点 F 的直线 AB 可设为 $x=my+\frac{p}{2}$.

代入抛物线方程 $y^2=2px$，可得

$$y^2-2pmy-p^2=0. \tag{1}$$

设 A、B 的坐标分别为 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则 y_1，y_2 是方程(1)的两个根

所以 $$y_1y_2=-p^2.$$

又 $BC/\!/x$ 轴，且点 C 在准线 $x=-\frac{p}{2}$ 上，故点 C 的坐标为 $\left(-\frac{p}{2},y_2\right)$，直线 OC 的斜率为

$$k=\frac{y_2}{-\frac{p}{2}}=\frac{2p}{y_1}=\frac{2px_1}{x_1y_1}=\frac{y_1^2}{x_1y_1}=\frac{y_1}{x_1},$$

即 k 也是直线 OA 的斜率. 所以直线 AC 经过原点 O.

证法 2 如图 8-19，作 $AD/\!/x$ 轴交准线 l 于 D，连结 CF、DF，设 l 交 x 轴于 E.

因为 $AD/\!/EF$，所以 $\angle DFE=\angle ADF$.

又 $|AD|=|AF|$，所以 $\angle ADF=\angle AFD$.

从而 $\angle DFE=\angle AFD$，即 FD 平分 $\angle AFE$.

同理可证 FC 平分 $\angle BFE$.

所以 $\angle CFD=90°$.

在 $\text{Rt}\triangle CFD$ 中，有 $|CE|\cdot|DE|=|EF|^2$，

即 $$y_C\cdot y_D=-p^2.$$

又因为 $y_1=y_D$，$y_2=y_C$，所以 $y_1\cdot y_2=-p^2$.

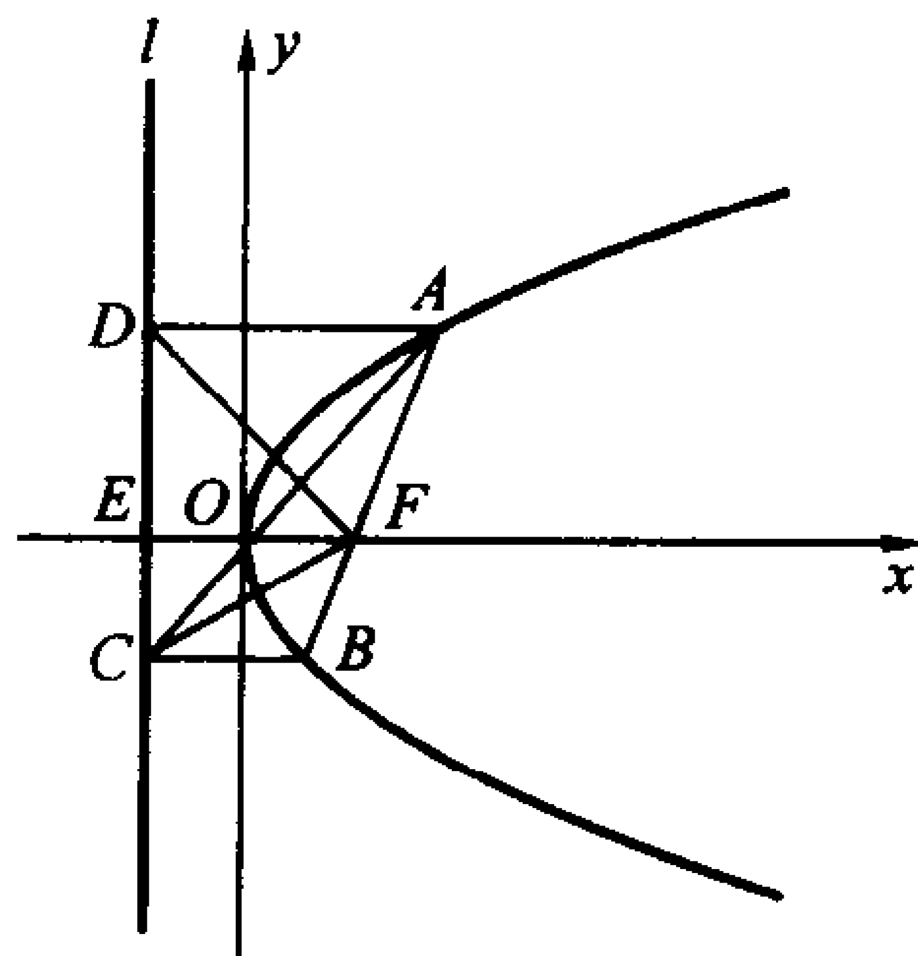


图 8-19

而点 C 的坐标为 $\left(-\frac{p}{2},y_2\right)$，直线 OC 的斜率为

$$k=\frac{y_2}{-\frac{p}{2}}=\frac{2p}{y_1}=\frac{2px_1}{x_1y_1}=\frac{y_1^2}{x_1y_1}=\frac{y_1}{x_1}=k_{OA},$$

所以，直线 AC 经过原点 O.

证法 3　因为 A、B 在抛物线 $y^2=2px$ 上，

故可设
$$A\left(\frac{y_1^2}{2p},y_1\right),B\left(\frac{y_2^2}{2p},y_2\right).$$

由题设，可得点 C 的坐标为 $\left(-\frac{p}{2},y_2\right)$.

又 A、B、F 三点共线，所以 $\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{BF}(\lambda\in\mathbf{R})$，

即
$$\left(\frac{p}{2}-\frac{y_1^2}{2p},-y_1\right)=\lambda\left(\frac{p}{2}-\frac{y_2^2}{2p},-y_2\right),$$

于是有
$$\begin{cases}\frac{p}{2}-\frac{y_1^2}{2p}=\lambda\left(\frac{p}{2}-\frac{y_2^2}{2p}\right),\\ y_1=\lambda y_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{y_1^2}{2p}=\lambda\left(-\frac{p}{2}\right),\\ y_1=\lambda y_2.\end{cases}\tag{1}$$

又因为
$$\overrightarrow{OA}=\left(\frac{y_1^2}{2p},y_1\right),\overrightarrow{OC}=\left(-\frac{p}{2},y_2\right),\tag{2}$$

由(1)、(2)得
$$\overrightarrow{OA}=\lambda\overrightarrow{OC},$$

故 A、O、C 三点共线，即直线 AC 经过原点 O.

证法 4　如图 8-20，设 x 轴与准线 l 交于 E，直线 AC 交 x 轴于 N，作 $AM\perp l$ 于 M，由抛物线定义，得
$$|AM|=|AF|,|BC|=|BF|.$$

由题意，知 $AM/\!/FE/\!/BC$.

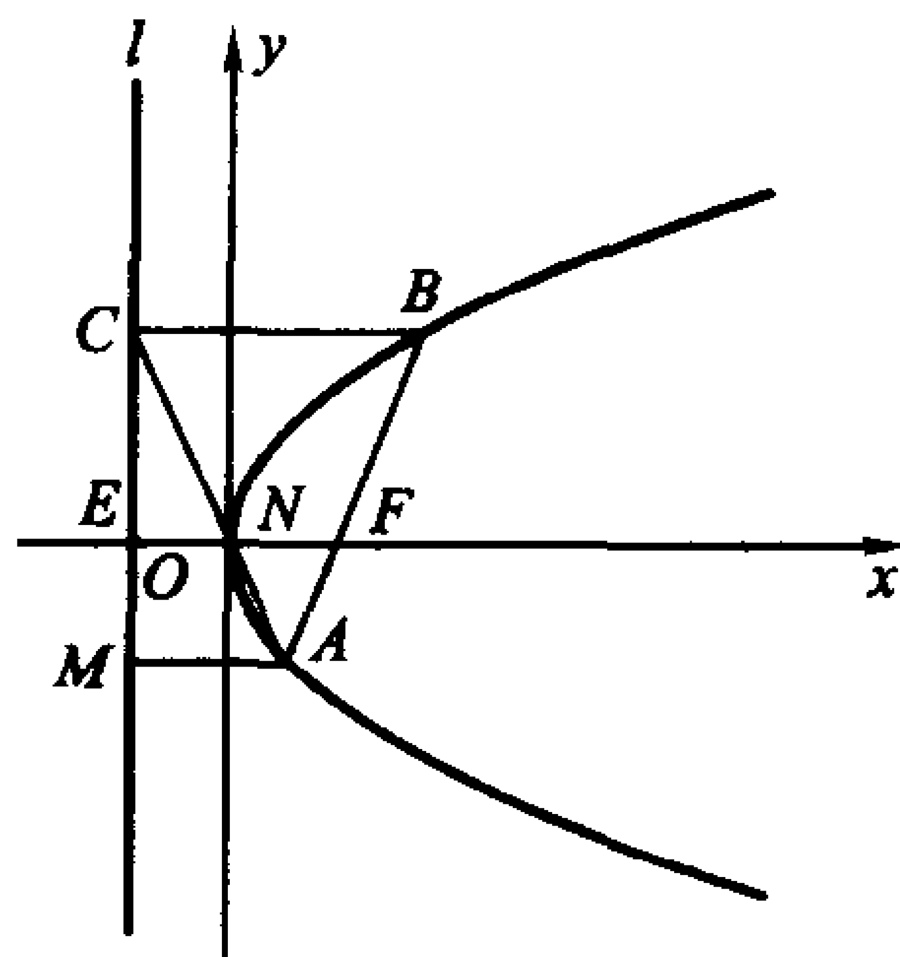


图 8-20

在△ACB 中，由 $\frac{|NF|}{|BC|}=\frac{|AN|}{|AC|}$，得 $|NF|=\frac{|BF|\cdot|AN|}{|AC|}$.

在△ACM 中，由 $\frac{|EN|}{|AM|}=\frac{|CN|}{|AC|}$，得 $|EN|=\frac{|AF|\cdot|CN|}{|AC|}$.

又 $\frac{|AN|}{|CN|}=\frac{|AF|}{|BF|}$，故 $|BF|\cdot|AN|=|AF|\cdot|CN|$，

所以 $|NF|=|EN|$，即 N 是 EF 的中点. 但 O 也是 EF 的中点，故 N 与抛物线的顶点 O 重合，即直线 AC 经过原点 O.

证法 5　设点 A 的坐标为 $A(x_1,y_1)$，则直线 OA,AF 的方程分别为 $y=\frac{y_1}{x_1}\cdot x$，

$y=\dfrac{y_1}{x_1-\frac{p}{2}}\left(x-\dfrac{p}{2}\right)$.

由$\begin{cases} y=\dfrac{y_1}{x_1}\cdot x, \\ x=-\dfrac{p}{2} \end{cases}$得直线 OA 与准线 l 的交点 D 坐标为 $D\left(-\dfrac{p}{2},-\dfrac{py_1}{2x_1}\right)$.

由$\begin{cases} y=\dfrac{y_1}{x_1-\frac{p}{2}}\left(x-\dfrac{p}{2}\right) \\ y^2=2px \end{cases}$得直线 AF 与抛物线的交点 B 的坐标为 $B\left(\dfrac{p^2}{4x_1},-\dfrac{p^2}{y_1}\right)$. 又 $BC/\!/x$ 轴,点 C 的坐标为 $C\left(-\dfrac{p}{2},-\dfrac{p^2}{y_1}\right)$.

由 $y_1^2=2px_1$ 得 $-\dfrac{py_1}{2x_1}=-\dfrac{p^2}{y_1}$,

所以,D、C 两点重合,故直线 AC 经过原点 O.

证法 6 设 $A(2pt_1^2,2pt_1)$,$B(2pt_2^2,2pt_2)$,则 $C\left(-\dfrac{p}{2},2pt_2\right)$,

因为直线 AB 过焦点 F,所以 $k_{FA}=k_{FB}$.

即得 $\dfrac{2pt_1}{2pt_1^2-\frac{p}{2}}=\dfrac{2pt_2}{2pt_2^2-\frac{p}{2}}$,化简得 $t_1t_2=-\dfrac{1}{4}$.

又因为 $k_{OA}=\dfrac{2pt_1}{2pt_1^2}=\dfrac{1}{t_1}$,$k_{OC}=\dfrac{2pt_2}{-\frac{p}{2}}=-4t_2=\dfrac{1}{t_1}$

所以 $k_{OA}=k_{OC}$,A、O、C 三点共线,

即直线 AC 经过原点 O.

证法 7 以 F 为极点,Fx 为极轴建立极坐标系,则抛物线的极坐标方程为

$$\rho=\frac{p}{1-\cos\theta}.$$

设 $A(\rho_1,\theta)$,$B(\rho_2,\pi+\theta)$

则
$$\rho_1=\frac{p}{1-\cos\theta},\rho_2=\frac{p}{1-\cos(\pi+\theta)}=\frac{p}{1+\cos\theta},$$

所以
$$|AB|=\frac{p}{1-\cos\theta}+\frac{p}{1+\cos\theta}=\frac{2p}{\sin^2\theta}.$$

由抛物线定义,知

$$|BC|=|BF|=\frac{p}{1+\cos\theta}.$$

设直线 AC 交极轴所在直线于 O'，则由 $BC//O'F$，得

$$\frac{|O'F|}{|BC|}=\frac{|AF|}{|AB|}\text{，所以}|O'F|=\frac{|BC|\cdot|AF|}{|AB|}.$$

而
$$|BC|\cdot|AF|=\frac{p}{1+\cos\theta}\cdot\frac{p}{1-\cos\theta}=\frac{p^2}{\sin^2\theta},$$

从而得

$$|O'F|=\frac{\dfrac{p^2}{\sin^2\theta}}{\dfrac{2p}{\sin^2\theta}}=\frac{p}{2}=|OF|,$$

于是 O' 与抛物线的顶点 O 重合，故直线 AC 经过原点 O.

点评　上述各种证明方法风格不同，方法有异. 但较多的证法都是用的分析——综合法.

在证法 1 和证法 2 中，我们是从证明 $k_{OC}=k_{OA}$，即从证明 $\dfrac{y_2}{-\dfrac{p}{2}}=\dfrac{y_1}{x_1}$ 着手分析，逐步逆推，然后用 $y_1\cdot y_2=-p^2$ 沟通. 为得到 $y_1\cdot y_2=-p^2$，在证法 1 中用了解析法；在证法 2 中则是利用了有关平面几何的知识.

证法 3 是从证明 A、O、C 三点共线，即从证明 $\overrightarrow{OA}=\lambda\overrightarrow{OC}$ 着手分析，逐步逆推，直至发现 $\overrightarrow{AF}=\lambda\overrightarrow{BF}$，与已知条件沟通，完成证明.

证法 4 是从证明点 N 与点 O 重合，即从证明 $EN=NF$ 着手分析，逐步逆推，然后利用抛物线定义和平面几何知识得出结论.

证法 5 是从证明点 D 与点 C 重合，即从证明 $y_D=y_C$ 着手分析，结合解析法逐步逆推，然后用 $y_1^2=2px_1$ 进行沟通.

证法 6 的思路与证法 1 类似，只是借助于抛物线的参数方程，使证法更简捷.

证法 7 的思路与证法 4 类似，只是借助于抛物线的极坐标方程，抓住线段长这个关键完成了证明.

可见上述证法的共同点，都是先从所要证的结论出发，作比较深入的分析，找到解题的起点和清晰的思路，然后用综合法表述解题过程. 对于较难的题目，用这一方法尝试，一般都可奏效.

横看成岭侧成峰，本例还有不少证明方法，但为了从另一个侧面充分发挥本题的思维价值和研究价值，建议读者换一换主攻方向：

(1) 若把题中的条件和结论分别记为(a) A、F、B 三点共线；(b) $BC//x$ 轴；

(c) A、O、C 三点共线. 则本题的要求是由(a)、(b)的成立推证(c)的成立. 那么,由(b)、(c)的成立能推证(a)的成立吗? 由(a)、(c)的成立能推证(b)的成立吗? 请读者作进一步探索.

(2) 本题中的 F 是抛物线的焦点,E 是准线与 x 轴的交点,O 是线段 EF 的中点. 由本题产生联想:能把本题中的条件和结论类比到椭圆中吗? 相应的命题怎样? 这命题成立吗,若成立,该如何证明?

例 12 如图 8-21,设点 A 和 B 为抛物线 $y^2=4px(p>0)$ 上原点以外的两个动点. 已知 $OA\perp OB$,$OM\perp AB$,求点 M 的轨迹.

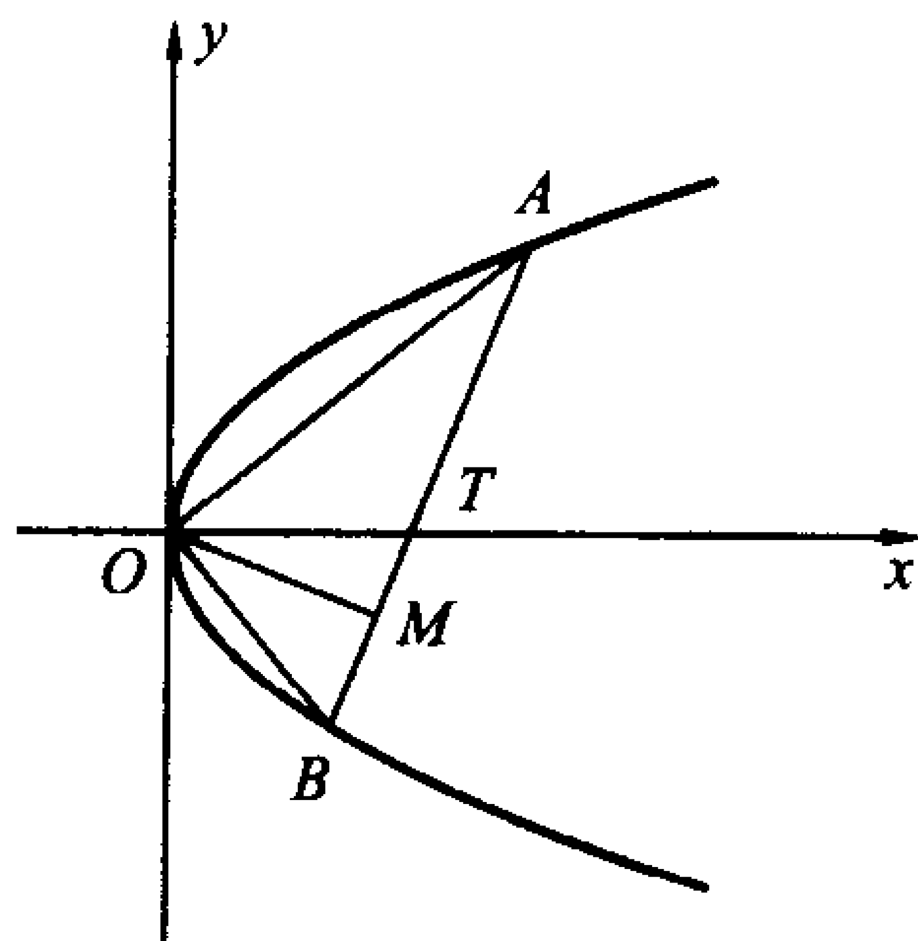


图 8-21

解法 1 设直线 AB 的方程为

$$y=kx+b(k\neq 0).$$

由 $\begin{cases} y=kx+b, \\ y^2=4px \end{cases}$ 消去 y,得

$$k^2x^2+(2kb-4p)x+b^2=0(k\neq 0).$$

设 A、B 的坐标分别为 (x_1,y_1)、(x_2,y_2),则有

$$x_1+x_2=\frac{4p-2kb}{k^2},x_1\cdot x_2=\frac{b^2}{k^2}.$$

$$y_1y_2=(kx_1+b)(kx_2+b)=k^2x_1x_2+kb(x_1+x_2)+b^2$$
$$=\frac{4pb}{k}.$$

因为 $OA\perp OB$ 所以 $x_1x_2+y_1y_2=0$.

即得 $\frac{b^2}{k^2}+\frac{4pb}{k}=0$ 所以 $k=-\frac{b}{4p}$.

所以,直线 AB 的方程为

$$y=-\frac{b}{4p}x+b=-\frac{b}{4p}(x-4p),$$

且直线 AB 经过定点 $T(4p,0)$.

设点 M 的坐标为 (x,y),则 $k_{OM}=\frac{y}{x}$,

又 $k_{AB}=k_{MT}=\frac{y}{x-4p}$,而 $OM\perp AB$,

所以 $k_{OM}\cdot k_{AB}=\frac{y}{x}\cdot\frac{y}{x-4p}=-1$,化简,得

$$x^2+y^2-4px=0.$$

又 A、B 异于原点,故 $x\neq 0$.

所以,点 M 的轨迹方程为 $x^2+y^2-4px=0(x\neq 0)$,它表示以 $(2p,0)$ 为圆

心、以 $2p$ 为半径的圆(除去原点).

解法 2　设 A、B 的坐标分别为 $\left(\frac{y_1^2}{4p},y_1\right)$、$\left(\frac{y_2^2}{4p},y_2\right)$，则

$$\overrightarrow{OA}=\left(\frac{y_1^2}{4p},y_1\right),\overrightarrow{OB}=\left(\frac{y_2^2}{4p},y_2\right).$$

因为 $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$，所以 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$.

于是有
$$\frac{y_1^2}{4p}\cdot\frac{y_2^2}{4p}+y_1y_2=0.$$

因为
$$y_1y_2\neq0\ \text{所以}\ y_1y_2=-16p^2.\tag{1}$$

又 $\overrightarrow{AB}=\left(\frac{y_2^2-y_1^2}{4p},y_2-y_1\right)$，由此得直线 AB 的方程为

$$\frac{x-\frac{y_1^2}{4p}}{\frac{y_2^2-y_1^2}{4p}}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1},$$

化简得
$$4px-(y_1+y_2)y+y_1y_2=0.\tag{2}$$

以(1)代入(2)，得　$4px-(y_1+y_2)y-16p^2=0$.

令 $y=0$ 得 $x=4p$，即直线 AB 经过定点 $T(4p,0)$.

设 $M(x,y)$，则 $\overrightarrow{OM}=(x,y)$，$\overrightarrow{MT}=(4p-x,-y)$

由 $\overrightarrow{OM}\perp\overrightarrow{MT}$ 得 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{MT}=0$，即 $x(4p-x)+y(-y)=0$，即 $x^2+y^2-4px=0$. 又 A、B 异于原点，所以 $x\neq0$.

所以，点 M 的轨迹方程 $x^2+y^2-4px=0(x\neq0)$，它表示以 $(2p,0)$ 为圆心，以 $2p$ 为半径的圆(除去原点).

解法 3　设直线 AB 的方程为 $y=kx+b$，显然 $b\neq0$，于是有 $\frac{y-kx}{b}=1$，代入抛物线的方程 $y^2=4px=4px\cdot1$，

得
$$y^2=4px\cdot\frac{y-kx}{b}.$$

即
$$by^2-4pxy+4pkx^2=0.$$

显然 $x\neq0$，由上式得

$$b\cdot\left(\frac{y}{x}\right)^2-4p\cdot\frac{y}{x}+4pk=0,$$

由此得
$$\frac{y_1}{x_1}\cdot\frac{y_2}{x_2}=\frac{4pk}{b}.$$

因为 $OA\perp OB$，所以$\frac{y_1}{x_1}\cdot\frac{y_2}{x_2}=-1$，

所以$\frac{4pk}{b}=-1, b=-4pk$.

故直线 AB 的方程可表示为 $y=k(x-4p)$. (1)

又 $OM\perp AB$，故直线 OM 的方程可设为

$$y=-\frac{1}{k}x. \quad (2)$$

由(1)、(2)消去 k，得 $x^2+y^2-4px=0(x\neq0)$，

所以，点 M 的轨迹方程为 $x^2+y^2-4px=0,(x\neq0)$，它表示以$(2p,0)$为圆心. 以 $2p$ 为半径的圆(除去原点).

点评 由于点 M 是直线 OM 与 AB 的交点，且 $OM\perp AB$，故点 M 的位置依赖于直线 AB 的位置，并利用 $OA\perp OB$，深入分析 AB 的特征，发现直线 AB 必过定点 $T(4p,0)$，从而发现点 M 在以 OT 为直径的圆上. 这就是解法 1 和解法 2 的共同思路. 解法 3 则是由 $OA\perp OB$，即由$\frac{y_1}{x_1}\cdot\frac{y_2}{x_2}=-1$ 联想到关于$\frac{y}{x}$的二次方程中的两根积. 因而设法构造齐次方程去求解. 解题后应加强反思，深入探究：

(1) 如果把直角三角形的直角顶点从原点移到抛物线上任一定点 $P(4pt_0^2, 4pt_0)$(t_0 为非零常数)处，其他条件不变，此时的斜边 AB 还过定点吗？

(2) 在上述情形下，过点 P 作 AB 的垂线，垂足为 Q，此时点 Q 的轨迹又是什么？

例 13 在以 O 为原点的平面直角坐标系中，点 $A(4,-3)$为$\triangle OAB$ 的直角顶点，已知$|\overrightarrow{AB}|=2|\overrightarrow{OA}|$，且点 B 的纵坐标大于零

(1) 求向量$\overrightarrow{AB}$的坐标；

(2) 是否存在实数 a，使抛物线 $y=ax^2-1$ 上总有关于直线 OB 对称的两个点？若不存在，说明理由；若存在，求 a 的取值范围.

解 (1) 设$\overrightarrow{AB}=(u,v)$.

由$\begin{cases}|\overrightarrow{AB}|=2|\overrightarrow{OA}|,\\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{OA}=0\end{cases}$ 得$\begin{cases}u^2+v^2=100,\\ 4u-3v=0,\end{cases}$

解得$\begin{cases}u=6,\\ v=8\end{cases}$ 或$\begin{cases}u=-6,\\ v=-8.\end{cases}$

又$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=(u+4,v-3)$.

由题设知，$v-3>0$，所以 $v=8$，得$\overrightarrow{AB}=(6,8)$.

（2）**解法 1** 由(1)得$\overrightarrow{OB}=(10,5)$，点 B 坐标为$(10,5)$，直线 OB 的方程为 $y=\frac{1}{2}x$.

假设存在满足条件的两点 $P(x_1,y_1)$、$Q(x_2,y_2)$，则有

$$\begin{cases} y_1=ax_1^2-1, & (1)\\ y_2=ax_2^2-1, & (2)\\ \dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\cdot\dfrac{1}{2}=-1, & (3)\\ \dfrac{x_1+x_2}{2}-2\cdot\dfrac{y_1+y_2}{2}=0. & (4)\end{cases}$$

由(1)、(2)、(3)解得 $$x_1+x_2=-\frac{2}{a},\tag{5}$$

由(1)、(2)、(4)得 $x_1+x_2-2a(x_1^2+x_2^2)+4=0$,

即 $$x_1+x_2-2a[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2]+4=0.\tag{6}$$

由(5)、(6)得 $$x_1\cdot x_2=\frac{5-2a}{2a^2}.\tag{7}$$

由(5)、(7)知，x_1,x_2 为方程 $x^2+\frac{2}{a}x+\frac{5-2a}{2a^2}=0$ 的两个相异实根，于是

$$\Delta=\frac{4}{a^2}-4\cdot\frac{5-2a}{2a^2}>0\text{，解得 }a>\frac{3}{2}.$$

故当 $a>\frac{3}{2}$ 时，抛物线 $y=ax^2-1$ 上总有关于直线 OB 对称的两个点.

解法 2 假设存在满足条件的两点 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$. PQ 的中点为 $M(x_0,y_0)$，则有

$$\begin{cases} y_1=ax_1^2-1, & (1)\\ y_2=ax_2^2-1, & (2)\\ \dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\cdot\dfrac{1}{2}=-1, & (3)\\ \dfrac{x_1+x_2}{2}-2\cdot\dfrac{y_1+y_2}{2}=0. & (4)\end{cases}$$

(2)－(1)，得 $$y_2-y_1=a(x_2-x_1)(x_2+x_1),$$

则有
$$-2=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=2a\cdot\frac{x_1+x_2}{2}=2ax_0,$$

所以 $x_0=-\frac{1}{a}$ 代入(4)，得 $y_0=-\frac{1}{2a}$.

于是弦 PQ 的中点为 $M\left(-\frac{1}{a},-\frac{1}{2a}\right)$.

又弦 PQ 中点 M 在抛物线内部

所以
$$-\frac{1}{2a}>a\left(-\frac{1}{a}\right)^2-1,$$

由此解得
$$a>\frac{3}{2}\text{或 }a<0.$$

但由题设知 $a>0$，故 $a<0$ 舍去.

故当 $a>\frac{3}{2}$ 时，抛物线 $y=ax^2-1$ 上总有关于直线 OB 对称的两个点.

点评　第(1)题主要是考查向量的有关概念和基本运算，要防止将点 B 的坐标作为向量 $\overrightarrow{AB}$ 的坐标.

第(2)题提供了两种解法，解法 1 中，在设出两对称点坐标、求出关系式后，不是去求出 x_1、x_2 的值，而是将 x_1+x_2、x_1x_2 整体解出，从而联想韦达定理、构造方程，利用判别式 $\Delta>0$ 去构造关于 a 的不等式，使解题过程简捷. 解法 2 则是利用抛物线的弦的中点一定在抛物线的“内部”，去建立关于 a 的不等式求取值范围. 一般地，含有焦点的区域为圆锥曲线的内部，若点 $M(x_0,y_0)$ 在抛物线 $y=ax^2-1(a>0)$ 内部，则有 $y_0>ax_0^2-1$；若点 $M(x_0,y_0)$ 在抛物线 $y^2=2px$ 内部，则有 $y_0^2<2px_0$. 应用如上结论，可使不少问题的解答显得直观而简捷. 但不管哪种解法，对这类问题必须注意两点：一是对称点的中点在对称轴上；二是对称点连线必与对称轴垂直.

3. 综合应用

例 14　如图 8-22，已知常数 $a>0$，在矩形 $ABCD$ 中，$AB=4$，$BC=4a$，O 为 AB 的中点. 点 E、F、G 分别在 BC、CD、DA 上移动，且 $\frac{BE}{BC}=\frac{CF}{CD}=\frac{DG}{DA}$，$P$ 为 GE 与 OF 的交点. 问是否存在两个定点，使点 P 到这两定点的距离和为定值？若存在，求出这两点的坐标及此定值；若不存在，请说明理由.

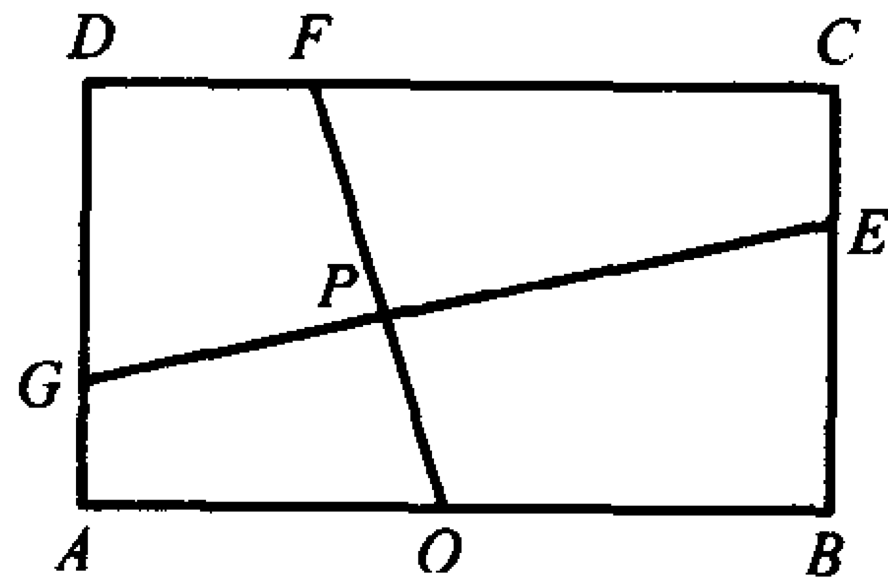


图 8-22

解　以 O 为坐标原点，AB 所在直线为 x 轴建

立直角坐标系，按题意，有

$$A(-2,0),B(2,0),C(2,4a),D(-2,4a).$$

设
$$\frac{BE}{BC}=\frac{CF}{CD}=\frac{DG}{DA}=k(0\leqslant k\leqslant 1),$$

由此得　$E(2,4ak),F(2-4k,4a),G(-2,4a-4ak)$,

易得直线 OF 的方程为
$$2ax+(2k-1)y=0, \tag{1}$$

直线 GE 的方程为
$$-a(2k-1)x+y-2a=0. \tag{2}$$

从(1)、(2)消去参数 k，得点 $P(x,y)$的坐标满足的方程

$$2a^2x^2+y^2-2ay=0,$$

即
$$\frac{x^2}{\frac{1}{2}}+\frac{(y-a)^2}{a^2}=1.$$

当 $a^2=\frac{1}{2}$ 时，点 P 的轨迹为圆弧，所以不存在符合题意的两个定点.

当 $a^2\neq\frac{1}{2}$ 时，点 P 的轨迹为椭圆的一部分，点 P 到该椭圆焦点的距离的和为定长.

当 $a^2<\frac{1}{2}$ 时，点 P 到椭圆的两个焦点 $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}-a^2},a\right)$，$\left(\sqrt{\frac{1}{2}-a^2},a\right)$ 的距离之和为定值 $\sqrt{2}$；

当 $a^2>\frac{1}{2}$ 时，点 P 到椭圆的两个焦点 $\left(0,a-\sqrt{a^2-\frac{1}{2}}\right)$，$\left(0,a+\sqrt{a^2-\frac{1}{2}}\right)$ 的距离之和为定值 $2a$.

点评　本题是一道非常好的解析几何题. 首先它体现了数与形的完美结合：在建立坐标系后，须把几何问题代数化；在获得点 P 的轨迹方程后，又须对方程的几何意义，作进一步的阐述，把代数结果几何化. 其次是要加强参数意识，才能使解题过程流畅，简捷. 由于点 P 的运动规律与 $k=\frac{BE}{BC}=\frac{CF}{CD}=\frac{DG}{DA}$ 有关，因此，选择以 k 为参数比较适宜. 通过分别建立直线 OF、GE 的方程，直接从中消去 k，即得动点 P 的轨迹方程. 这样，没有出现点 P 的参数方程 $\begin{cases}x=f(k),\\ y=g(k)\end{cases}$ 作为中介，避免了复杂的计算. 第三是分类讨论必须层次清晰. 先解决是否存在的问题，在确定存在的条件下，再解决点 P 是到哪两个定点的距离和为定值及定值是多少

的问题.

例 15 已知抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2+c$,点 $P(2,4)$、A、B 均在这条抛物线上,直线 PA 与 PB 的倾斜角互补.

(1) 试问直线 AB 的方向有什么特征?

(2) 是否存在直线 AB,使$\triangle APB$ 成为以 AB 为底边的等腰三角形?若存在,求出直线 AB 的方程;若不存在,请说明理由.

解 (1) 因为 $P(2,4)$在抛物线上,所以 $4=-\frac{1}{2}\cdot 2^2+c$,得 $c=6$,即抛物线方程为 $y=-\frac{1}{2}x^2+6$.

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则有 $y_1^2=-\frac{1}{2}x_1^2+6$,$y_2^2=-\frac{1}{2}x_2^2+6$,

$$k_{PA}=\frac{y_1-4}{x_1-2}=\frac{-\frac{1}{2}x_1^2+6-4}{x_1-2}=-\frac{x_1^2-4}{2(x_1-2)}=-\frac{x_1+2}{2},$$

同理,$k_{PB}=-\frac{x_2+2}{2}$.

由题设,知 $k_{PA}+k_{PB}=0$,即$-\frac{x_1+2}{2}-\frac{x_2+2}{2}=0$,

所以
$$x_1+x_2=-4.$$

又
$$k_{AB}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{-\frac{1}{2}x_1^2+6+\frac{1}{2}x_2^2-6}{x_1-x_2}=-\frac{x_1+x_2}{2}=2,$$

即直线 AB 的斜率为定值 2,所以直线 AB 的方向一定.

(2) 假设有直线 AB:$y=2x+b$ 满足题设条件.

由$\begin{cases}y=2x+b,\\ y=-\frac{1}{2}x^2+6\end{cases}$ 得 $x^2+4x+2(b-6)=0$. (1)

因为直线与抛物线相交,所以方程(1)的 $\Delta\geqslant 0$,

即得 $4^2-4\times 2(b-6)\geqslant 0$,解得 $b\leqslant 8$.

设线段 AB 的中点为 $C(x_C,y_C)$,则

$$x_C=\frac{1}{2}(x_1+x_2)=-2,y_C=2x_C+b=b-4,$$

且
$$|PC|=\sqrt{4^2+(8-b)^2}.$$

又点 P 到直线 AB 的距离为

$$d=\frac{|2\times2-4+b|}{\sqrt{2^2+1}}=\frac{|b|}{\sqrt{5}}.$$

若$\triangle APB$是以 AB 为底边的等腰三角形,应有

$|PC|=d$,即　　$\sqrt{4^2+(8-b)^2}=\frac{|b|}{\sqrt{5}}$,

解得 $b=10$,这与 $b\leqslant8$ 矛盾.

所以,符合题设条件的直线 AB 不存在.

点评　第(1)题也可直接求出点 A 与点 B 的坐标,再求直线 AB 的斜率,但不及上述的"设而不求"的方法简捷.本题的结论中也可把直线 AB 看作为一组斜率为 2 的平行的直线.事实上,本题还可推广:P 为抛物线(或椭圆或双曲线)上一点,过 P 作两条直线 PA、PB 与抛物线(或椭圆或双曲线)相交于 A、B 两点,若直线 PA 与 PB 的倾斜角互补,则 AB 为一组平行的直线.请读者证明.

第(2)题是探索研究性题型.它可转化为探索"b 是否存在"?为此可将题目中诸多条件聚焦为 b 的性质:首先利用直线 AB 与抛物线相交得出 $\Delta\geqslant0$,求得 $b\leqslant8$;然后利用两种不同形式,即点 P 与线段 AB 中点 C 的距离和点 P 到直线 AB 的距离,表示同一个量,由此解得 $m=10$.于是用反证法证得:符合题设条件的直线不存在.值得注意的是:"用两种不同形式表示同一个量"也是常用的解题策略,值得反思,领悟.

例 16　A、B、C 是我方三个炮兵阵地,A 在 B 的正东,相距 6 km,C 在 B 的北偏西 30°,相距 4 km,P 为敌炮阵地.某时刻在阵地 A 发现敌炮阵地 P 的某种信号,由于 B、C 两地比 A 距 P 地远,因此 4 s 后 B、C 才同时发现这一信号(假设该信号的传播速度为 1 km/s).

(1) 若从 A 阵地炮击 P 地,求炮击的方位角;

(2) 若信号从 P 地上空 P_0 处被发现,则 A、B、C 三地收到信号的时间有什么变化?

解　(1) 如图 8-23,以直线 BA 为 x 轴,线段 AB 的中垂线为 y 轴,建立直角坐标系.

由题设,知 $A(3,0)$,$B(-3,0)$,且 $C(-5,2\sqrt{3})$,故炮阵地 $P(x,y)$ 在 BC 的中垂线 l 上.

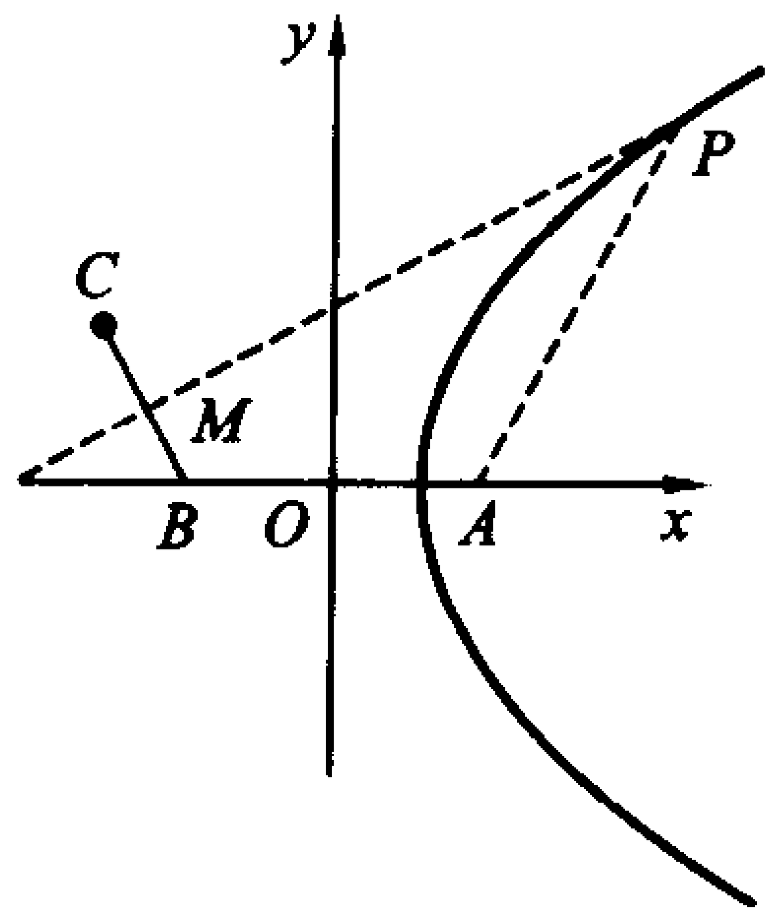


图 8-23

又 BC 的中点为 $M(-4,\sqrt{3})$,$k_{BC}=-\sqrt{3}$,$k_l=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

所以 l 的方程为 $y-\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}(x+4)$.

又$|PB|-|PA|=4$,所以P在以B、A为焦点的双曲线的右半支上。

而$a=2$,$c=3$得$b^2=5$,双曲线方程为

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1(x\geqslant 2).$$

由$\begin{cases} y-\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x+4), \\ \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1 \end{cases}$ 得 $11x^2-56x-256=0$,

解得$x_1=-\dfrac{32}{11}$(舍去),$x_2=8$,点P的坐标为$(8,5\sqrt{3})$.

从而 $$\tan\angle xAP=\frac{5\sqrt{3}}{8-3}=\sqrt{3},\angle xAP=60°$$

因此A阵地炮击P处的方位角为北偏东30°.

(2) 设$|PP_0|=h$,$|PA|=a$,$|PB|=b$.

显然$|P_0B|=|P_0C|$,所以B、C两地仍同时收到信号.

又$|P_0A|^2-|P_0B|^2=(a^2+h^2)-(b^2+h^2)=a^2-b^2$,

$$|P_0A|-|P_0B|=\frac{a^2-b^2}{|P_0A|+|P_0B|}=(a-b)\cdot\frac{a+b}{\sqrt{a^2+h^2}+\sqrt{b^2+h^2}},$$

而$\dfrac{a+b}{\sqrt{a^2+h^2}+\sqrt{b^2+h^2}}<1$,所以$|P_0A|-|P_0B|<|PA|-|PB|$,

即B、C两地收到信号与A地收到信号比原来的时间差要短.

点评 解决本例(1)的关键是根据实际问题建立数学模型.即通过A与B(或C)发现信号的早晚和B、C同时发现信号,抽象得到点P既满足$|PB|-|PA|=4$,又满足$|PB|=|PC|$,从而建立方程组模型$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1, \\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(x+7) \end{cases}$进行求解.建立的数学模型能否解决问题,应以实践来检验,通过实践修订,改正方案.

本例的(2)虽是一个空间问题,但引入参数$h=|P_0P|$,仍可将问题转化为比较$|P_0A|-|P_0B|$与$|PA|-|PB|$的大小.

第九章　球面几何学初步

球面几何在天文、航海、大地测量直至宇宙航行等方面都有广泛应用. 这一章作一简单的介绍.

第一节　球面几何的有关概念

定义 1　三维空间中与一个定点 O 的距离等于 r 的点的轨迹叫做球面. 定点 O 叫做球心,等距离的长度 r 叫做球的半径(或者半径为 r 的半圆绕直径旋转一周所得旋转面叫做球面). 记为 S_r^2.

定义 2　通过球心的平面截球面所得截口是一个圆,它叫做大圆;不过球心的平面截球面所得的截口也是一个圆,它叫做小圆.

显然,大圆把球面分成相等的两部分. 而通过球面上不在同一直径两端的两个点,能作并且只能作一个大圆.

定义 3　两大圆相交所成之角,叫做球面角. 其交点叫做球面角的顶点,大圆弧叫做这球面角的边.

一般,球面角是以过顶点的圆弧的二切线所夹的角来度量的(或与两顶点的连线垂直的圆面与两大圆所成的二面角的平面角来度量).

定义 4　球面上两个大圆的半圆所包围的球面部分叫做球面二角形.

定义 5　球面上相交于三点的三个大圆弧所围成的球面上的一部分,叫做球面三角形. 这三个大圆弧叫做球面三角形的边. 通常用小写拉丁字母 a,b,c 来表示. 各大圆弧所成的球面角,叫做球面三角形的角,通常大写拉丁字母 A,B,C 来表示. 这三个边与三个角统称为球面三角形的六个元素.

将球面三角形 ABC 的各顶点与球心 O 连结,则构成球心三面角 $O-ABC$. 显然,由于圆的中心角与所对的弧同度,有

$$a=\angle BOC, b=\angle AOC, c=\angle AOB.$$

又根据球面角的度量,知球面三角形的边与所对应的球心三面角的二面角同度,而球面三角形的角与球心三面角的二面角同度.

为了方便和切合实用,在讨论球面三角形时,其边与角都限于小于 $180°$.

下面引入球面上的圆的极的概念:

定义 6　垂直于已知球面的圆(不论大圆或小圆)所在平面的球直径的端

点，叫做这个圆的极，这个圆上的点到极的球面距离都相等，这个距离叫做球面半径. 如果球面半径等于 90°，则大圆弧叫做极点的极线. 因而极是垂直于极线的大圆的交点（这类似地球的赤道与北极（或南极）的关系）. 过球面三角形 ABC 各边的极作大圆弧构成另一个球面三角形 $A'B'C'$ 叫做原球面三角形的极三角形.

可推证：极三角形的边与原球面三角形之对应角互补，极三角形的角与原球面角的对应边互补.

由上述定义可得球面三角形的边和角的基本性质：

性质 1 球面三角形两边之和大于第三边.

推论 球面三角形两边之差小于第三边.

性质 2 球面三角形三边之和大于 0°而小于 360°.

性质 3 球面三角形三角之和大于 180°而小于 540°.

性质 4 球面三角形的两角之和减第三角小于 180°.

性质 5 若球面三角形的两边相等，则这两边的对角也相等；反之若两角相等，则这两角的对边也相等.

性质 6 球面三角形中，大角对大边，大边也对大角.

定义 7 在同球或等球面上，若两球面三角形的对应边和角分别相等，而且排列顺序相同，则称这两个球面三角形全等.

因此，在同球或等球上两个球面三角形，满足下列条件之一，且相等部分排列顺序相同，则这两个球面三角形全等：

(1) 两边及其夹角彼此相等；

(2) 两角及其夹边彼此相等；

(3) 三边彼此相等；

(4) 三角彼此相等.

定义 8 球面上两点 A,B 间大圆弧（劣弧）的长叫做球面距离.

我们可以证明：在球面上连结 A,B 两点的所有曲线（弧）之长以球面距离为最短.

事实上，过 A,B 两点作任意曲线弧 $ACD\cdots GB$ 如图9-1，而以 $C,D,\cdots,G$ 各点分这曲线弧为无穷个无穷小的弧 $\overset{\frown}{AC},\overset{\frown}{CD},\cdots,\overset{\frown}{GB}$. 由于这些弧非常小，我们可以把它们看作是大圆弧. 把 $A,C,D,\cdots,G,B$ 各点与球心 O 连结起来，于是便得到多面角 $O-ACD\cdots BG$. 由多面角的性质，知 $\angle AOB<\angle AOC+\angle COD+\cdots+\angle GOB$，由于圆的中心角与所对的圆弧同度，有

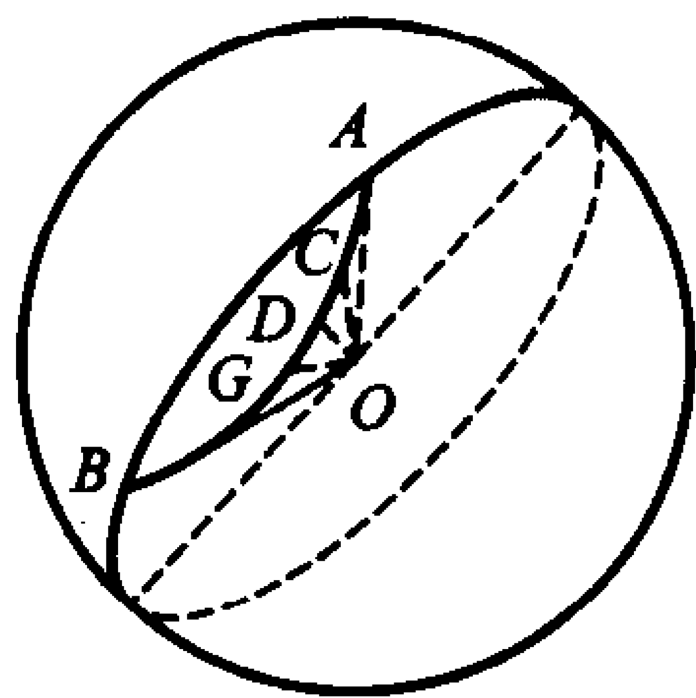


图 9-1

$\overset{\frown}{AB}<\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{CD}+\cdots+\overset{\frown}{GB}$，即 $\overset{\frown}{AB}<$ 曲线弧

长 $ACD\cdots GB$.

这就是说，连结两点 A,B 的所有曲线弧之长，以球面距离 AB 为最短（注：用微分几何中的大地线原理来证明，则更为清楚）.

习 题 9.1

证明球面三角形的边和角的性质 2，性质 3.

第二节 球面三角

在研究球面三角时，引用到平面三角的一些基本公式，如 $\sin^2 A+\cos^2 A=1$，$\sin 2A=2\sin A\cdot\cos A$，$\cos A-\cos B=-2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cdot\sin\frac{1}{2}(A-B)$ 等等，这并不是说平面三角的公式与球面三角的公式可以通用，这是因为在平面三角中的公式有恒等式和条件等式两种. 恒等式如前面所提到的那些公式，仅就某一元素或两个元素关系而言，根本与三角形没有关系，当然可以应用到球面三角中来；条件等式如正弦公式、余弦公式等等，平面三角形所特有的公式不可以应用到球面三角中来.

1. 余弦公式

取球面三角形 ABC，并假定 $b,c<90°$. 作球心三面角 O-ABC，如图 9-2. 自 A 作 b,c 边的切线分别交直线 OC,OB 于 M,N；构成两个平面直角三角形 OAM,OAN 与两个平面任意三角形 OMN, AMN. 于是按平面三角的余弦定理，有

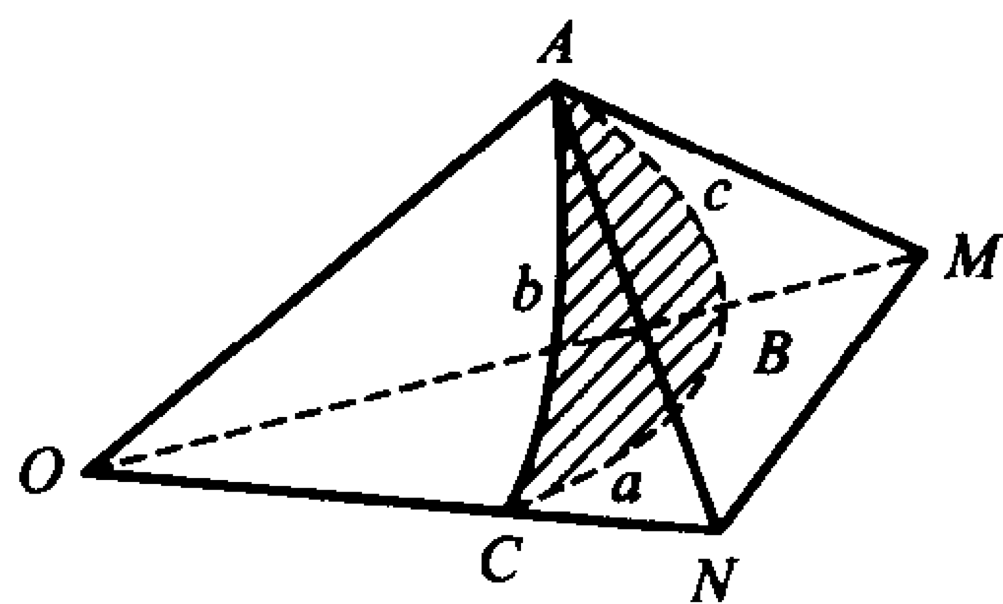


图 9-2

$$MN^2=AM^2+AN^2-2AM\cdot AN\cdot\cos A,$$
$$MN^2=OM^2+ON^2-2OM\cdot ON\cdot\cos a.$$

于是
$$AM^2+AN^2-2AM\cdot AN\cdot\cos A=OM^2+ON^2-2OM\cdot ON\cdot\cos a,$$

即
$$2OM\cdot ON\cdot\cos a=(ON^2-AN^2)+(OM^2-AM^2)+2AM\cdot AN\cdot\cos A=OA^2+OA^2+2AM\cdot AN\cdot\cos A.$$

亦即
$$\cos a=\frac{OA}{ON}\cdot\frac{OA}{OM}+\frac{AN}{ON}\cdot\frac{AM}{OM}\cdot\cos A=\cos b\cdot\cos c+\sin b\cdot\sin c\cdot\cos A.$$

同理
$$\cos b=\cos c\cdot\cos a+\sin c\cdot\sin a\cdot\cos B,$$
$$\cos c=\cos a\cdot\cos b+\sin a\cdot\sin b\cdot\cos C.$$

这就是说，球面三角形边的余弦等于其他二边余弦的乘积加上这二边正弦及其夹角余弦的乘积.

设球面三角形 ABC 的极三角形为 $A'B'C'$，则有

$$\cos a'=\cos b'\cdot\cos c'+\sin b'\cdot\sin c'\cdot\cos A'.$$

注意到 $a'=180°-A, b'=180°-B, c'=180°-C, A'=180°-a$,

则 $$\cos A=-\cos C\cdot\cos A+\sin B\cdot\sin C\cdot\cos a.$$

同理，$$\cos B=-\cos C\cdot\cos A+\sin C\cdot\sin A\cdot\cos b,$$

$$\cos C=-\cos A\cdot\cos B+\sin A\cdot\sin B\cdot\cos c.$$

这就是说，球面三角形角的余弦等于其他两角余弦乘积冠以负号加上这两角正弦及其夹边余弦的乘积.

2. 正弦公式

设球面三角形 ABC，作球心三面角 $O-ABC$. 过点 B 作平面 OAC 的垂线交此平面于 D，如图 9-3. 再从 D 向 OA, OC 引垂线 DE, DF；连结 BE、BF，于是得四个平面直角三角形 OBE, OBF, BDE、BDF. 而且 $\angle BOC=a$, $\angle AOC=b$, $\angle AOB=c$, $\angle BED=A$, $\angle BFD=C$.

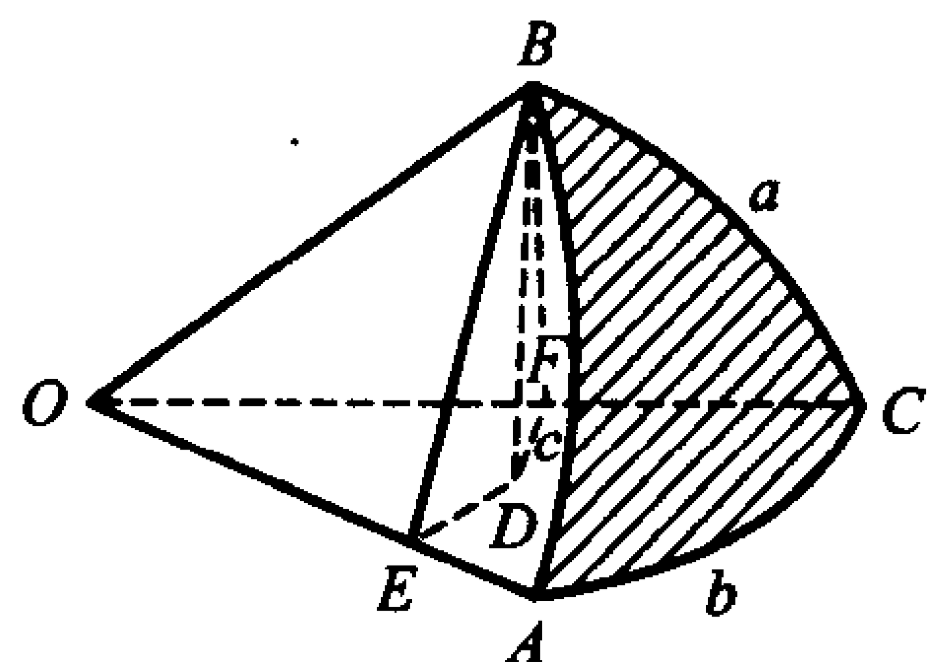


图 9-3

于是 $$\frac{\sin c}{\sin C}=\frac{BE/OB}{BD/BF}=\frac{BE\cdot BF}{OB\cdot BD}=\frac{BF/OB}{BD/BE}=\frac{\sin a}{\sin A}.$$

同理 $$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}.$$

故 $$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\sin c}{\sin C}.$$

这就是说，球面三角形各边的正弦与其对角的正弦成比例.

我们还可推证得 $$\frac{\sin a}{\sin A}=\frac{\sin b}{\sin B}=\frac{\sin c}{\sin C}=\frac{\sin a\cdot\sin b\cdot\sin c}{2\Delta}.$$

其中 $\Delta=\sqrt{\sin p\cdot\sin(p-a)\cdot\sin(p-b)\cdot\sin(p-c)}$, $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$.

3. 半角公式

由 $\cos A=\dfrac{\cos a-\cos b\cdot\cos c}{\sin b\cdot\sin c}$ 及平面三角公式 $\sin^2\dfrac{A}{2}=\dfrac{1-\cos A}{2}$,

可推得 $$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(b-c+a)\cdot\sin\frac{1}{2}(a-b+c)}{\sin b\cdot\sin c}}=\sqrt{\frac{\sin(p-b)\cdot\sin(p-c)}{\sin b\cdot\sin c}},$$

其中 $p=\frac{1}{2}(a+b+c)$.

同理 $\sin\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-c)\cdot\sin(p-a)}{\sin c\cdot\sin a}}$，$\sin\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{\sin(p-a)\cdot\sin(p-b)}{\sin a\cdot\sin b}}$.

同样由 $\cos A=\frac{\cos a-\cos b\cdot\cos c}{\sin b\cdot\sin c}$ 及平面三角公式 $\cos^2\frac{A}{2}=\frac{1+\cos A}{2}$，

有 $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\sin p\cdot\sin(p-a)}{\sin b\cdot\sin c}}$，$\cos\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{\sin p\cdot\sin(p-b)}{\sin c\cdot\sin a}}$，$\cos\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{\sin p\cdot\sin(p-c)}{\sin a\cdot\sin b}}$.

以上公式分别称为半角正弦公式和半角余弦公式.

同样有半边正弦公式和半边余弦公式：令 $P=\frac{1}{2}(A+B+C)$，

$$\sin\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{-\cos P\cdot\sin(P-A)}{\sin B\cdot\sin C}},\ \sin\frac{b}{2}=\sqrt{\frac{-\cos P\cdot\cos(P-B)}{\sin A\cdot\sin C}},$$

$$\sin\frac{c}{2}=\sqrt{\frac{-\cos P\cdot\cos(P-C)}{\sin A\cdot\sin B}},\ \cos\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{\cos(P-B)\cdot\cos(P-C)}{\sin B\cdot\sin C}},$$

$$\cos\frac{b}{2}=\sqrt{\frac{\cos(P-C)\cdot\cos(P-A)}{\sin C\cdot\sin A}},\ \cos\frac{c}{2}=\sqrt{\frac{\cos(P-A)\cdot\cos(P-B)}{\sin A\cdot\sin B}}.$$

4. 球面二角形的面积

球面二角形有优劣两种，我们所讨论的是劣球面二角形. 由于球面二角形可视为围绕直径旋转某一角 α（角度制度数）所成的旋转面，因之，球面二角形的面积与这样的旋转角成比例. 由此即得球面二角形的面积 U 的公式：$U=\frac{\alpha}{90^\circ}\pi r^2$.

5. 球面三角形的面积

设球面三角形 ABC 的面积为 S，为了导出 S，对球面三角形的每个角作球面二角形，如图9－4. 即对 A 角作二角形 ABA_0CA，对 B 角作二角形 BAB_0CB，对 C 角作二角形 CAC_0BC.

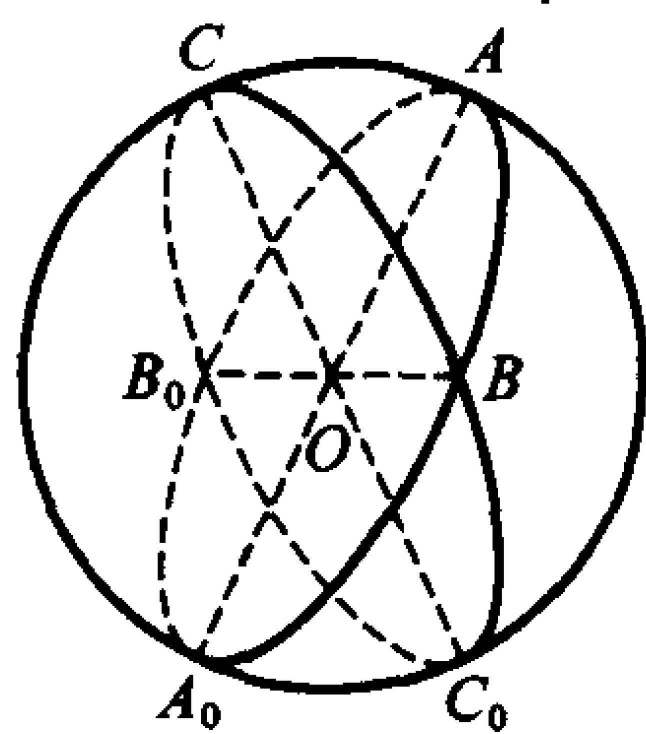


图 9－4

于是二角形 $BAB_0CB=\frac{B}{90^\circ}\pi r^2=\triangle ABC+\triangle AB_0C$，

二角形 $ABA_0CA=\frac{A}{90^\circ}\pi r^2=\triangle ABC+\triangle A_0BC$，

二角形 $CAC_0BC=\frac{A}{90^\circ}\pi r^2=\triangle ABC+\triangle ABC_0$.

注意到 $\triangle AB_0C=\triangle A_0BC_0$（互为对称图形），及 $\triangle ABC+\triangle A_0BC+\triangle A_0BC_0+\triangle ABC_0=2\pi r^2$（半球面面积），

故 $S=\triangle ABC=\frac{A+B+C-180^\circ}{180^\circ}\pi r^2$

6. 球面角超

由于 $A+B+C$ 是球面三角形 ABC 的三内角之和，而由角的基本性质 3 可知，$A+B+C$ 之值必大于 180°. 于是，我们称球面三角形三内角之和与平面三角形三内角之和的差，叫做球面角超（或叫球面剩余），习惯上用 E 来表示，即

$$E=A+B+C-180^\circ（表角度），$$

或

$$E=(A+B+C-180^\circ)\frac{\pi}{180^\circ}（表弧度）.$$

习 题 9.2

请用向量方法证明球面三角中的余弦公式、正弦公式.

第三节 球面坐标

球面上点的位置可用某一坐标系确定. 在球面几何知识的学习中，我们常建立三维直角坐标系或向量坐标系；但在天文学、测量学、结晶学、实用地质学等中常用赤道坐标系和水平坐标系.

1. 三维直角坐标系

以球心 O 为坐标系原点建立三维直角坐标，则点集

$S_r^2=\{X\mid X=(x_1,x_2,x_3),x_1^2+x_2^2+x_3^2=r^2,x_1,x_2,x_3\in\mathbf{R},r>0\}$，称为以 O 为球心，半径为 r 的球面. 其中 (x_1,x_2,x_3) 称为点 X 的标准化齐次坐标，简称点 X 的坐标. 对于球面 S_r^2，可以给出任意两点 $A=(a_1,a_2,a_3),B=(b_1,b_2,b_3)\in S_r^2$ 之间的球面距离公式

$$\widehat{AB}=r\cdot\arccos\left(\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{r^2}\right),\frac{\widehat{AB}}{r}\in[0,\pi].$$

若以 $\overline{OX}$ 表点 X（简记为 X）的矢径，则可引进向量运算：

$$A\cdot B=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3,A\times B=\left(\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_3 & a_1\\ b_3 & b_1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\right).$$

分别称为矢径 A 与 B 的数量积和向量积.

若取 $r=1$，则当 $A、B\in S^2$ 时，有 $\cos\widehat{AB}=A\cdot B,\sin\widehat{AB}=|A\times B|$.

2. 赤道坐标系

把地球当作一个球，在球面上取一点 A 并通过 A 作大圆弧，以 A 点为极作极线. 转动球面，使 A 点和球的极 P 重合，如图 9-5. 于是通过极的大圆弧 $\widehat{PQP_1Q_1}$ 叫做本初经线，极线 QmQ_1 叫做赤道.

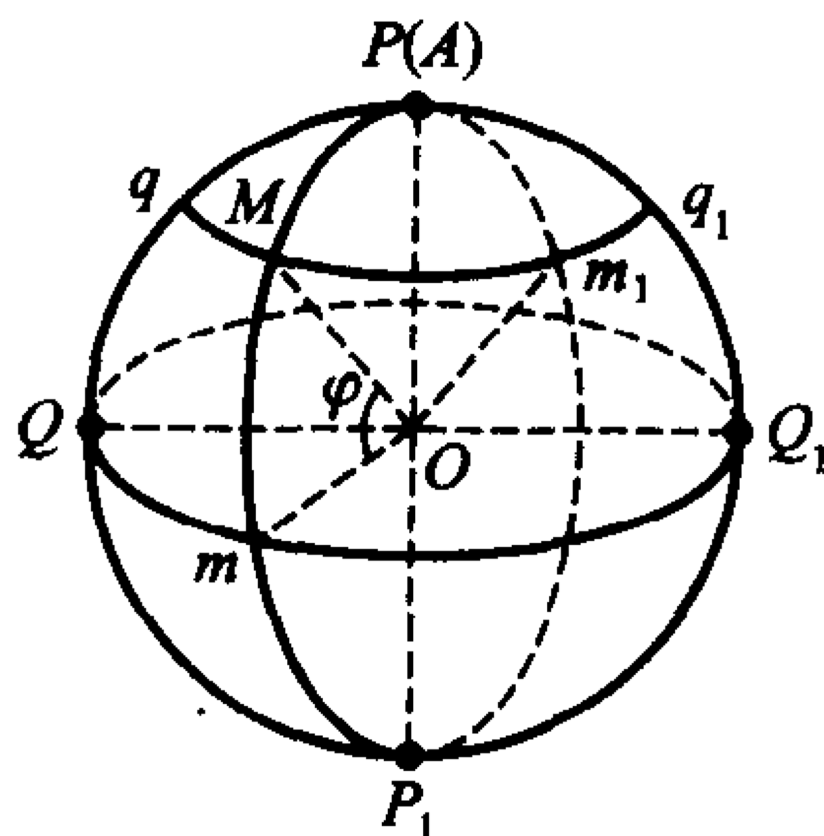


图 9-5

为了确定球面上一点 M 对于赤道 QmQ_1 和本初经线 $\widehat{PQP_1Q_1}$ 的位置，通过 M 点和极点 P 作大圆弧，得到的半圆周 PMP_1 叫做 M 点的经线，或经圆. 从 M 点沿大圆弧到赤道的距离 mM 叫做 M 点的纬度. 纬度用字母 φ 来表示，并且从赤道到北极或南极是从 0°到 90°变化. 从赤道到北极的纬度叫做北纬，从赤道到南极的纬度叫做南纬.

有时不用纬度而对应于中心角 MOP 的弧$\widehat{MP}$，$\widehat{MP}$叫做极距并且用字母 Δ 表示. 极距和纬度的和等于 90°，即 $\varphi+\Delta=90°$.

在球面上，也像在平面上一样，一个坐标是不够的；因为在平行于赤道 QmQ_1 的小圆 qMq_1 上，所有的点的纬度都是相同的.

通常把经度取作第二个坐标，经度是用本初经线（对地球来说本初经线就是格林尼治经线）所在平面与 M 点的经线所在平面中间的二面角 QPP_1M 来度量的. 二面角 QPP_1M 对应于球面角 qPM. 经度用 λ 表示并且按时针的方向从 0°到 360°变化或者分为东西两方面在 0°和 180°之间变化（东经和西经）.

假设 M 点有纬度 $\varphi_M=46°$和经度 $\lambda_M=82°$，则一般缩写为 $M=(46°;82°)$.

3. 水平坐标系

假设转动球面使点 A 和天顶 Z 重合，则极线 SHN 在水平面内如图 9－6.

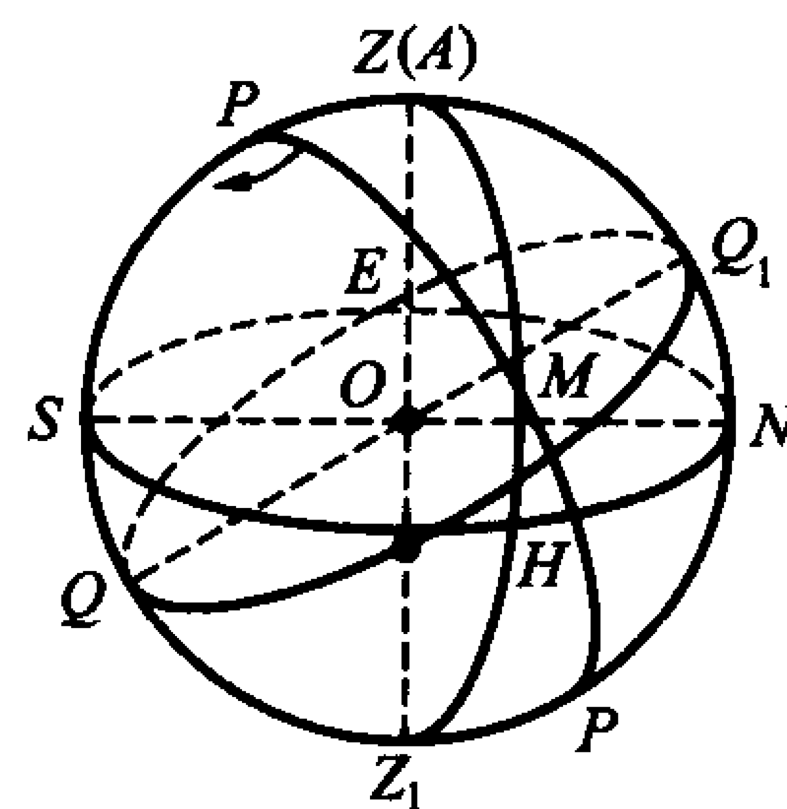


图 9－6

球面上任一点 M 的位置在这种场合用下面两个坐标确定：第一个是天顶距——就是圆弧 ZM 或中心角 ZOM；第二个是这样得到的，假设经过点 Z、点 Z_1（底点）和点 M 作半圆，则第二个坐标就是方位角 NH（从点 N（北）到点 H 的圆弧，此处点 H 是半圆 ZMZ_1 和水平线 $NHSE$ 的交点）. 方位角从点 N（北）或点 S（南）开始按顺时针方向从 0°变到 360°. 方位角用字母 A 或 α 表示.

有时第一个坐标不用天顶距而取点 M 的倾角 α，倾角是用弧 HM 或中心角 HOM 度量并且确定 M 到水平线的距离. 同一个点的顶点距离和倾角之间存在一个关系式

$$Z+\alpha=90°.$$

假设点 M 有顶点距离 $Z_M=60°$和方位角 $\alpha_M=30°$，则缩写成为 $M(60°;30°)$.

习 题 9.3

1. 试推导三维直角坐标系中球面两点间的距离公式.
2. 比较赤道坐标系与水平坐标系的异同.

第四节 球面几何与双曲几何

在球面几何学中，球面三角形的内角和大于 180°. 如果把任何一种与欧氏几何不同的几何都可以叫做非欧几何，则球面几何也是一种非欧几何. 谈到非欧几何时，一般要讲到最早发现的一种非欧几何——双曲几何.

球面几何是研究球面空间的子集(二维球面 S_r^2)几何性质的. 在一定意义下，它和双曲几何、欧氏几何(又称抛物几何)三者具有同等地位，有许多类似之处. 下面我们就双曲几何作一点简介.

在数学发展的历史上，关于欧几里得第五公设的独立性证明，使数学家们烦恼了两千年. 到 17、18 世纪有些数学家想用反证法来证，结果导出了一系列异于直觉的推论，且没有找出什么矛盾，于是发现了一种新的几何，称为罗巴切夫斯基几何或双曲几何.

双曲几何的公理系统是将希尔伯特的五组公理中的四组公理保留不变，仅将欧氏平行公理改为双曲平行公理：

双曲平行公理　通过直线 AB 外的一点 C，在平面 ABC 上至少可以引两条直线与直线 AB 不相交.

在双曲几何中，凡是由欧氏第五公设推导的命题都不能成立，而由双曲平行公理可以得到双曲几何的一组结论，其中主要有下列命题：

(1) 在平面内，对于一条直线，存在不相交的垂线和斜线；

(2) 存在一个三角形，它没有外接圆；

(3) 存在一个三角形，它的三条高不相交；

(4) 三角形的内角和小于两直角；

(5) 三角形的内角和不是常数；

(6) 不存在矩形；

(7) 平面上不在已知直线上且与此直线等距离的三个点，不在同一直线上；

(8) 在同一平面上的任何两条直线，一条直线上的点到另一条直线上的距离是无界的；

(9) 如果两个三角形的三个对应角相等，那么这两个三角形全等(所以不存在相似形)；

(10) 在角的内部存在直线，它不通过角的顶点，而且与角的两边都不相交；

(11) 三角形 ABC 的面积和它的角亏 $\delta=\pi-(A+B+C)$ 成正比.

这些命题都和双曲平行公理等价. 也就是说，在双曲几何公理系统中，用上述任何一个命题代替双曲平行公理，同样可以展开双曲几何.

从以上简单的介绍中就可看出，双曲几何与我们习惯的欧氏空间很不协调，那么双曲几何是否有现实意义？

开始，罗巴切夫斯基也将这种几何学称为“想像中的几何学”. 但是，从前面所引的第 11 个命题可知，三角形面积越小，它的内角和越接近于两直角，因而与欧氏几何的性质越接近. 作为宇宙空间是否可能更接近于双曲空间？虽然至今还没有定论，但是非欧几何在爱因斯坦(A. Einstein. 1878—1955)的相对论的创建中所发挥的巨大作用，则是非常令人鼓舞的.

为了证明双曲几何不会有矛盾，可以在欧氏空间作出双曲几何的模型，这样如果双曲几何有矛盾，那么欧氏几何也就有矛盾.

1868 年，贝尔特拉米(Beltrami. E，1835—1900)在拟球面上实现了双曲平面的片段；1870 年，克莱因在射影空间中实现了双曲几何的公理系；紧接着庞卡莱(Poincaré，H，1854—1912)又在欧氏平面上实现了双曲几何. 这样双曲几何公理系的相容性解决了，双曲几何有了若干直观模型.

为了能简捷地研究双曲几何，这里抛弃传统的体系，采用数学结构的思想，先规定双曲距离，从而把双曲空间作为特殊的度量空间(拓扑结构)进行定量的研究.

当然，这样可能削弱了直观. 为了避免这个缺陷，有助于理解，不妨先在三维欧氏空间中，给出二维双曲几何的一个直观模型——双曲面模型，由此模型可以方便地导出克莱因模型和庞卡莱模型.

如图 9－7，双曲面模型是将双叶双曲面的一叶 H^2 看作整个“双曲平面”. H^2 上的点作为“双曲点”. 过任意两点 $A,B\in H^2$，以及双曲面的中心 O 作平面 OAB，它与 H^2 的交线作为“双曲直线”. 显然，两点确定唯一的直线.

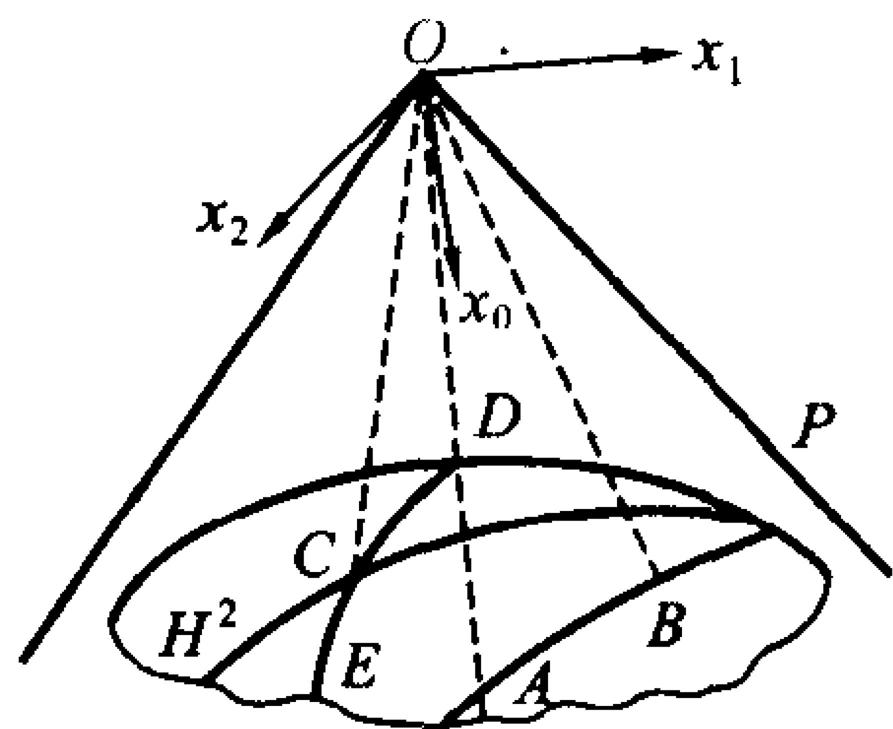


图 9－7

过双曲直线 AB 外一点 $C\in H^2$，作双曲直线 $CD\in H^2$，则当平面 OCD 与 OAB 的交线 OP 恰为 H^2 的渐近锥面的母线时(双曲直线 CD 与 AB 没有公共点)，就称双曲直线 CD 与 AB 平行. 显然，过 C 点与双曲直线 AB 平行的直线有两条 CD 和 CE. 除此之外，所有与双曲直线 AB 不相交的直线称为 AB 的分散线. 可以看出，两条互相平行的直线在一方无限接近，而在另一方无限远离(命题 8). 还可以看到，在 $\angle DCE$ 内部，存在直线 AB 与角的两边都不相交(命题 10).

在图 9－7 中，取中心 O 为原点建立如图所示的空间直角坐标系 $Ox_0x_1x_2$. 设双叶双曲面的方程为 $x_0^2-x_1^2-x_2^2=0$. 对照模型就不难理解下面的有关规定.

点集 $H_r^2=\{X\mid X=(x_0,x_1,x_2),x_0^2-(x_1^2+x_2^2)=r^2,x_0,x_1,x_2\in\mathbf{R},x_1\geqslant r>0\}$

称为双曲平面，其中(x_0,x_1,x_2)称为点 X 的标准化齐次坐标，简称点 X 的坐标.

对于双曲平面 H_r^2，规定任意两点 $A=(a_0,a_1,a_2)$、$B=(b_0,b_1,b_2)\in H_r^2$ 之间的双曲距离

$$\rho(A,B)=r\cdot \operatorname{Arch}\left(\frac{a_0b_0-a_1b_1-a_2b_2}{r^2}\right).$$

这样规定了距离的点集 H_r^2 称为二维双曲空间，常数 r 称为双曲空间的曲率半径. 为方便计，取 $r=1$，即把曲率半径取作长度单位，H_r^2 就可记作 H^2.

在上述规定中用到了双曲函数的反函数. 现介绍它们的定义和性质：

双曲余弦：$x=\operatorname{ch} t=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}\geqslant 1$，当 $t\geqslant 0$ 时，单调增.

反双曲余弦：$t=\operatorname{Arch} x=\ln(x+\sqrt{x^2-1})\ (x\geqslant 1)$.

双曲正弦：$y=\operatorname{sh} t=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}$，单调增.

反双曲正弦：$t=\operatorname{Arsh} y=\ln(y+\sqrt{y^2+1})$.

双曲正切：$u=\operatorname{th} t=\operatorname{sh} t/\operatorname{ch} t$

$\qquad\qquad=(e^t-e^{-t})/(e^t+e^{-t})$.

反双曲正切：$t=\operatorname{Arth} u=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+u}{1-u}\ (|u|<1)$.

恒等式：$x^2-y^2=\operatorname{ch}^2 t-\operatorname{sh}^2 t=1$.

$$\operatorname{ch}(\alpha\pm\beta)=\operatorname{ch}\alpha\operatorname{ch}\beta\pm\operatorname{sh}\alpha\operatorname{sh}\beta.$$
$$\operatorname{sh}(\alpha\pm\beta)=\operatorname{sh}\alpha\operatorname{ch}\beta\pm\operatorname{ch}\alpha\operatorname{sh}\beta.$$

下面，再来介绍一下双曲三角形及其有关公式.

双曲平面 H^2 上不在一直线上的三点 A,B,C 以及线段 AB,BC,CA 所构成的图形叫做双曲三角形. 点 A,B,C 称为它的顶点，我们用 $\rho(B,C)=a$，$\rho(C,A)=b$，$\rho(A,B)=c$ 表示三顶点的对边及其长度. 在不会引起误解的情况下，也用 A,B,C 表示双曲三角形 ABC 的三个内角，即 $A=\angle CAB$，$B=\angle ABC$，$C=\angle BCA$，这里 $A,B,C\in(0,\pi)$.

双曲三角形有如下一系列公式

边的余弦公式：$\operatorname{ch} a=\operatorname{ch} b\cdot\operatorname{ch} c-\operatorname{sh} b\cdot\operatorname{sh} c\cdot\cos A$.

$$\operatorname{ch} b=\operatorname{ch} c\cdot\operatorname{ch} a-\operatorname{sh} c\cdot\operatorname{sh} a\cdot\cos B.$$
$$\operatorname{ch} c=\operatorname{ch} a\cdot\operatorname{ch} b-\operatorname{sh} a\cdot\operatorname{sh} b\cdot\cos C.$$

角的余弦公式：$\operatorname{ch} a=\dfrac{\cos B\cdot\cos C+\cos A}{\sin B\cdot\sin C}$，

$$\operatorname{ch} b=\frac{\cos C\cdot\cos A+\cos C}{\sin A\cdot\sin C},$$

$$\operatorname{ch} c=\frac{\cos A\cdot\cos B+\cos C}{\sin A\cdot\sin B}.$$

正弦公式：$\dfrac{\operatorname{sh} a}{\sin A}=\dfrac{\operatorname{sh} b}{\sin B}=\dfrac{\operatorname{sh} c}{\sin C}=\dfrac{\operatorname{sh} a\cdot\operatorname{sh} b\cdot\operatorname{sh} c}{2\Delta}$.

其中 $\Delta=\sqrt{\operatorname{sh} p\cdot\operatorname{sh}(p-a)\cdot\operatorname{sh}(p-b)\cdot\operatorname{sh}(p-c)}$，$p=\dfrac{1}{2}(a+b+c)$.

习　题　9.4

1. 试证明恒等式：$\operatorname{ch}(\alpha\pm\beta)=\operatorname{ch}\alpha\cdot\operatorname{ch}\beta\pm\operatorname{sh}\alpha\cdot\operatorname{sh}\beta$.
2. 试推导边的余弦公式：$\operatorname{ch} a=\operatorname{ch} b\cdot\operatorname{ch} c-\operatorname{sh} b\cdot\operatorname{sh} c\cdot\cos A$.

第十章 几何定理的机器证明

第一节 数学机械化与我国数学家所取得的成就

数学机械化这一词，出自于美籍华人科学家王浩 1960 年发表的题目《向机械化数学前进》一文，后被吴文俊院士肯定而沿用. 曾有一段时期“机械化方法”又称“机器证明”. 机械化方法就是寻找一个依据一定法则可以按部就班机械地进行的方法，在现代通常称为算法，而算法可以编成程序在计算机上实施. 数学机械化就是数学定理能够在计算机上实现证明.

机械化思想在我国古代数学早就已经有了. 但在近代应该从笛卡儿创立解析几何开始，解析几何方法使几何问题的证明走上机械化道路. 第一次将无章可循的几何定理的证明，按一定步骤把几何问题化为代数形式来解决. 为几何定理机械化证明提供了简明的方法.

莱布尼茨曾有过“推理机器”的设想，他为此研究过逻辑，设计并造出能做乘法的计算机，这样就促进了布尔代数、数理逻辑以及计算机的研究.

希尔伯特在《几何基础》一书中，提出了几何定理的机械化思路，但是这一机械化思想 80 多年来一直没引起人们的注意，就是希尔伯特本人对自己的机械化思想也从未作过任何说明. 直到 1984 年才被吴文俊院士所发现，并在计算机上实现了用希尔伯特机械化思想来证明一小类的平面几何定理.《几何基础》一书中的定理 62，就展现了希尔伯特的机械化思想.

定理 62 设一种几何中，公理 $\mathrm{I}_{1\text{-}3}$，Ⅱ，Ⅳ*（加强的平行公理）都满足，而且帕斯卡定理正确，这几何中的每一条纯粹的交点定理，可以通过作适当的辅助点和辅助直线，表为有限个帕斯卡构形的组合.

定理 62 中的 $\mathrm{I}_{1\text{-}3}$ 是希尔伯特公理系中的第一类结合公理中的关于平面的三条公理，Ⅱ 是第二类顺序公理中的全部 4 条公理，Ⅳ* 是加强的平行公理，即“设 a 是任一直线，A 是 a 外的任一点，在 a 与 A 所确定的平面上，有且仅有一条直线通过 A 且与 a 平行.”

其中帕斯卡定理是：设有两条相交的直线，设 A,B,C 是其中一条直线上的三点，A',B',C' 是另一直线上的三点，而且它们都不是这两条直线的交点. 若 $CB' /\!/ BC'$，且 $CA' /\!/ AC'$，则 $BA' /\!/ AB'$.

所谓帕斯卡构形，是指相当于帕斯卡定理内容的一个图形.

所谓纯粹交点定理，是指定理中只含有关于点与直线的位置关联及关于直线平行性的叙述，而不用其他关系（如垂直、等角、等长等度量关系）.

为了使人们认识这一定理的机械化思想，吴文俊院士将定理 62 改写为

希尔伯特机械化定理　平面帕斯卡几何中存在机械化程序. 可以在某些附加的非退化条件下，用有限步证明或否定任一构造型纯交点定理，这些条件也是在程序中机械化地产生的.

简言之，平面帕斯卡几何的定理是可以机械化的，或初等几何只涉及从属和平行关系的定理是可以机械化的.

希尔伯特仅仅提出了具体的机械化思想（也许他本人并没有意识到这一点）. 只有当电子计算机出现之后，希尔伯特机械化思想才由吴文俊院士于 20 世纪 80 年代在计算机上实现 .

电子计算机的问世，使数学定理机器证明的研究活跃起来. 波兰数学家塔斯基在 1950 年证明了一个引人注目的定理：初等几何（以及初等代数）的定理证明是可以用机械化方法判定的.

可惜，他的判定方法太复杂，即使用高速的计算机也证明不了稍难的几何定理.

塔斯基等人还提出过制造所谓判定机器（证明机）的设想，然而他的设想和方法都不切实可行，直到目前为止也没有取得什么令人信服的结果.

1958 年王浩设计了几个计算机程序，使用 IBM704 机，在 3 分钟内，证明了罗素、怀德海的巨著《数学原理》一书中的 220 条命题，稍后又扩到 400 条，王浩因此获 1983 年人工智能国际联合会与美国数学会颁发的里程碑奖.

1976 年美国数学家阿佩尔和黑肯及计算机专家麦克，在高速计算机上用了近 1 200 小时，证明了“四色问题”（1852 年英国人古特列提出了著名的四色问题：“如果只用四种颜色，我们能否对球面上（平面上）的任何地图着色.”），使一百多年来未解决的难题得到肯定回答. 但是在数学界还有不少人认为计算机解不是证明，因为不可能核对其计算的正确性. 有人讲“即使是真的，总觉得没有什么数学味道”.“四色问题”虽然在计算机中得到解决，但由于没有给出这一解的现代数学理论依据，不少数学家对机械化方法持怀疑态度.

1976 年吴文俊院士开始进入数学机械化领域的研究. 他在中国古代数学机械化与代数化的优秀思想启发下，提出了自己的独特的机械化方法. 1977 年发表在《中国科学》1977 年第六期上的《初等几何判定问题与机械化证明》的科学论文，掀开了数学机械化这一领域新的一页. 开创了从公理化到机械化的新路，第一次在计算机上证明了一大类初等几何问题，如西姆松定理，费尔巴哈定理，莫勒定理等，还发现了不少新的不平凡的几何定理. 在国际上被称为吴法（具体方法

在第二节介绍).吴法像吸铁石一样,吸引了从事这一领域研究的许多专家学者.

1989年周咸青在美国出版了专著,利用吴法在计算机上证明了512条定理,这些定理大多是不平凡的.用吴法证明一个定理一般仅几秒钟,今后人们在初等几何范围内提出的新命题是真是假,只要在计算机一试,便知分晓.

吴法的影响是世界性的,著名科学家卡波尔写道"吴的工作使自动推理领域发生了革命性的变化".

吴文俊院士作为数学机械化领域的首席科学家,带领我国数学家在数学机械化领域取得了一个又一个重大成果,从而确定了以吴文俊院士为首的中国数学机械化学派在国际上的领先地位.2001年3月,吴文俊院士因此荣获首届中国科学技术最高奖.

1992年张景中院士应周咸青的邀请赴美访问.他与周咸青,高小山合作,利用面积方法所创立了消点算法(将在第三节介绍).在Windows系统下,他们研制出几何定理自动生成可读证明的软件,使人们期待近三十年的可读证明第一次在计算机上实现了.所谓可读证明就是在计算机上所显示的证明,与人用笔在纸上写的证明完全一致,而不再是那种计算机能懂而人看不明白的证明.这一成果被著名计算机专家波依尔誉为"使计算机能像处理算术一样处理几何的必由之路上的一个里程碑".

2000年张景中院士研制出与传统几何证明方法完全一致的,第三代智能数学平台软件,这是世界上第一个具有智能性的教学软件,对它的推广将有利于中学数学教学现代化的进程.

1986年洪加威教授发表论文指出,对于一类平面几何定理,只要按照一定的规则去举例,并且对具体的数值计算到一定的精确程度,就完全可以用来判定一个几何定理的真与假,这就是例证法.由于洪法的复杂程度,迄今未能在计算机上有效地实现用举例子方法证明几何定理.

几乎同时,张景中、杨路提出了数值并行算法,这是第一个具有实践意义的用举例子来证明几何定理的方法.在计算机上实现用举例子来证明几何定理,不仅在数学上是漂亮的,对其哲学基础也引起很大的震动.

由于在机械化证明所取得的优秀成果.张景中和杨路获1997年国家自然科学奖二等奖(当年缺一等奖).

吴文俊、张景中两院士的研究成果,基本上解决了初等几何等式型定理的机械化证明的重大问题,但是几何(代数)不等式证明的机械化方法的研究却进展不大,举步维艰.1985年,吴文俊院士在上海的一次学术会上就指出:不等式的机械化证明是"一大难题".

不等式机械化证明的困难在于它依赖实代数的自动推理算法的研究.经过

多年的努力，杨路终于在1998年创立了降维算法(将在第四节介绍)，并研制出实现这一算法的BOTTEMA软件，利用这一软件在计算机上验证了近二千个不等式，一百多个可能是新的，其中还有不少是猜想，平均每秒钟可验证十几个不等式，这个速度已经赶上目前计算机证明等式型平面几何定理的效率. 因此，杨路在不等式机械化证明所取得成果，完全可与吴法、张法相媲美，这是中国数学家在几何定理机械化证明这一领域所取得的又一重大成果.

正如王梓坤院士所指出："我们可以自豪地说：几何定理机器证明研究的重大成果大都是由我国数学家所取得的."

为什么中国数学家会在几何定理机械化证明这一领域取得如此辉煌的成就？除了吴文俊院士有着"非凡的洞察力和智慧"等天才因素外，还有以下几点重要原因.

第一，继承中国古代数学机械化优良传统. 1976年吴文俊院士进入数学机械化领域研究之前，花了几年时间致力于中国古代数学的研究，发现中国古代数学走的是与西方数学完全不同的道路. 西方古代数学侧重于逻辑推理，着重对数学问题的求证，也就是公理化方法. 我国古代数学用的是机械化方法，对数学问题着重于计算求解. 早在1世纪成书的《九章算术》中，就记载着位值制(十进位值)，有了位值制才有可能有开方、立方的计算法则(算法)，并载有分数的各种运算以及解线性方程组的方法.《九章算术》还把问题分为九大类，每一类给出一种固定的解题程序(算法)，学会了一种解题方法，就能解决一大类的问题. 用一个固定的程序解决一类问题，正是数学机械化的基本思想. 追求机械化方法，是我国古代数学的优良传统. 刘徽在他注解的《九章算术》(3世纪)中，用圆内接正多形的周长逼近圆周长，成为后世求圆周率更精确的一般方法.

到了宋代从引进"天元"(未知数)概念发展到天元术. 宋代朱世杰《四元玉鉴》中就详细记载了四元术，即解多至四个未知数的多项式方程组的解法(算法). 只有在方程建立后，才有种种机械化算法来解答，天元概念与天元术的出现，与之相伴又产生了几何代数化方法，以及相当于多项式的表达方式与运算方法及消元法. 这使方程的建立和求解成为机械化过程，变得更容易.

在中国古代数学的机械化方法和代数化的优秀思想启发下，吴文俊院士进入数学机械化领域研究的第二年就取得重大突破，创立了具有中国特色的一个主要方法——特征列法. 吴文俊院士写道："我们所用的特征列方法，只是在《四元玉鉴》所指出的途径上给以现代化的处理，使之臻于严密合于现代数学的要求而已". 吴文俊机械化原理的创立，从思维到方法都受益于中国古代数学机械化方法的思想.

第二，为机械化方法建立了严密的现代数学理论依据. 吴文俊、张景中、杨路

等都是我国著名数学家. 吴文俊院士在拓扑学、数学史、代数几何等方向都取得了世界一流的成果. 他们在创立数学机械化方法的同时,还致力于建立它们的现代数学的理论基础. 吴法有吴消元法和特征列法等现代数学理论所支撑,张法有用面积法所创立的欧氏几何新公理体系为基础,杨法有多项式完全判别系统理论为依据,所以他们所取得的成果令人信服,不仅得到计算机科学家们的高度赞誉,而且为数学家们所接受.

第三,国家大力支持. 吴文俊院士先后主持了国家攀登计划《机器证明以及其应用》和《数学机械化研究及其应用》两项重大项目. 国家科学技术部首批启动的 15 项国家重大项目之一的《数学机械化及软件平台》也是他主持的.

面对中国数学家在数学机械化领域所取得的举世瞩目的成就,著名计算机科学家美籍华人王浩教授就曾经讲过:"要使每个中国数学教师都懂吴法". 确实,关于数学定理机器证明方面的书"是中国数学教师当读的". 作为高等师范院校数学系应义不容辞担当这一重任,填补高等师范院校数学系在数学机械化教育方面的空白.

第二节 吴文俊几何定理证明的机械化方法

1977 年我国著名数学家吴文俊院士发表的《初等几何判定问题和机械化证明》科学论文,文中提出了几何定理机械化证明的新方法,首次在计算机上证明了一大类初等几何定理,从而开创了从公理化到机械化的新路. 著名科学家 Kupar认为"吴的工作使自动推理领域发生了革命性的变化". 在国际上被誉为"吴方法". 2001 年 3 月吴文俊院士主要因此而荣获中国首届科学技术最高奖.

下面我们简单介绍"吴方法"是怎样在计算机上证明几何定理的. 吴方法主要有下面三个步骤.

第一步 几何问题代数化

用解析几何方法(当然也可用其他方法)可以实现把几何问题化为代数形式. 例如要描述 AB,CD 两线段相等,即证明 $AB=CD$. 先选定一个直角坐标系,设 $A=(x_1,x_2)$,$B=(x_3,x_4)$,$C=(x_5,x_6)$,$D=(x_7,x_8)$,则利用两点间距离公式,可表示为 $(x_1-x_3)^2+(x_2-x_4)^2=(x_5-x_7)^2+(x_6-x_8)^2$,即可表示

$$(x_1-x_3)^2+(x_2-x_4)^2-(x_5-x_7)^2-(x_6-x_8)^2=0.$$

又例如要描述两线段 AB、CD 垂直,可利用垂直公式表成

$$\frac{x_3-x_1}{x_4-x_2}=-\frac{x_8-x_6}{x_7-x_5}.$$

上式如果分母为 0,计算机就不会识别,为了避免这一情形,可将上式写成

$$(x_4-x_2)(x_8-x_6)+(x_3-x_1)(x_7-x_5)=0$$

还有像两直线平行，三点共线，三线共点，两角相等，一点是两点连线的中点，点在角的平分线上，一点分两点成正比，一点在圆上，四点共圆等都可以用解析几何方法将它们化为代数形式. 这样就能将一些基本的几何问题化为代数形式.

选好坐标系后，还要选取自由变元和约束变元，一般自由变元是由与几何问题假设条件无关所选取的自由点的坐标所组成，而约束变元是受几何问题假设条件所限制的点的坐标所组成. 所谓几何问题代数化，其实质就是将几何问题假设条件部分用上述解析几何方法化为有自由变元和约束变元的多项式组

$$\begin{aligned}&f_1(u_1,u_2,\cdots,u_n,x_1,x_2,\cdots,x_m)=0,\\&f_2(u_1,u_2,\cdots,u_n,x_1,x_2,\cdots,x_m)=0,\\&\cdots\\&f_m(u_1,u_2,\cdots,u_n,x_1,x_2,\cdots,x_m)=0,\end{aligned}\tag{1}$$

其中 $u_1,u_2,\cdots,u_n$ 表示自由变元，$x_1,x_2,\cdots,x_m$ 为约束变元. 几何问题的结论部分则表为多项式

$$g(u_1,u_2,\cdots,u_n,x_1,x_2,\cdots,x_m)=0\tag{2}$$

或者多项式组 g_i 的形式.

第一步的关键是选好坐标系，哪些是自由点(相应的自由变元)，哪些是约束点(相应的约束变元)，往往不是固定的，但在同一问题中，自由变元和约束变元是固定的.

第二步 三角化(也称吴升列)

将(1)式中按约束变元重新排序为三角化，就是通过代数方法(类似于线性方程组的高斯消元法)将约束变元重新排成如图 10-1 的三角形式，将(1)式化为

$$\begin{aligned}&f_1^*(u_1,u_2,\cdots,u_n,x_1^*)=0,\\&f_2^*(u_1,u_2,\cdots,u_n,x_1^*,x_2^*)=0,\\&f_3^*(u_1,u_2,\cdots,u_n,x_1^*,x_2^*,x_3^*)=0,\\&\cdots\\&f_m^*(u_1,u_2,\cdots,u_n,x_1^*,\cdots,x_m^*)=0.\end{aligned}\tag{3}$$

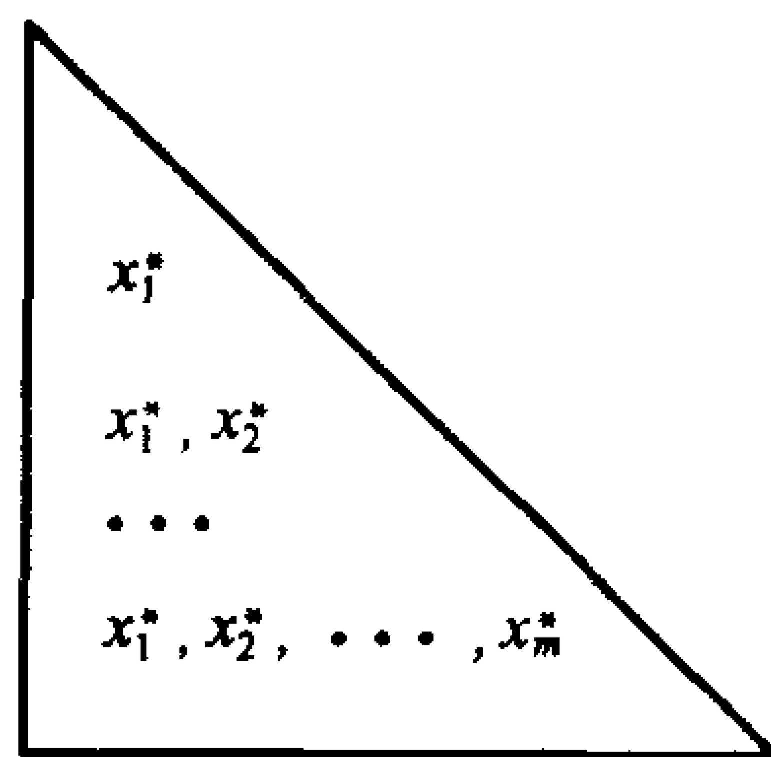


图 10-1

这样一来，在(3)式中第一个多项式只含有第一个约束变元的多项式，而(3)式中第二个多项式只含有第一个约束变元和第二个约束变元，第 m 个多项式含有所有 m 个约束变元.

由于多项式方程组(1)一般是非线性方程组,因此完成第二步有一定的复杂性,这也是“吴方法”的精髓.

第三步 作除法求余(亦称逐步除法)

把(3)式中多项式简记为 $f_1^*, f_2^*, \cdots, f_m^*$,而将结论写成 g.

将 g 除以 f_m^*(把它们都看作最后一个约束变元 x_m^* 的多项式,并作多项式除法),为了避免商式出现分式(因为分式可能有使分母为 0 的情况,这样计算机就不容易识别),要在 g 乘上某个因式 c_1,得

$$c_1 g = a_1' f_m^* + R_m, \tag{4}$$

再将余式 R_m 除以 f_{m-1}^*(把它们都看作约束变元 x_{m-1}^* 的多项式),为了避免商式中出现分式,要在 R_m 乘上某个因式 c_2,得

$$c_2 R_m = a_2' f_{m-1}^* + R_{m-1}, \tag{5}$$

用同样方法可得

$$c_3 R_{m-1} = a_3' f_{m-2}^* + R_{m-2}, \tag{6}$$

一直继续下去,最后得

$$c_{m-1} R_3 = a_{m-1}' f_2^* + R_2, \tag{7}$$

$$c_m R_2 = a_m' f_1^* + R_1 (\equiv R). \tag{8}$$

把上式(4)式乘上 c_2,然后将(5)式代入得

$$c_1 c_2 g = a_1' c_2 f_m^* + a_2' f_{m-1}^* + R_{m-1},$$

再把上式乘上 c_3,然后把(6)式代入得

$$c_1 c_2 c_3 g = a_1' c_2 c_3 f_m^* + a_2' c_3 f_{m-1}^* + a_3' f_{m-2}^* + R_{m-2},$$

依次进行,并将上式中 $f_m^*, f_{m-1}^*, \cdots, f_1^*$ 的系数用 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 代替,最后得

$$c_1 c_2 \cdots c_m g = a_1 f_m^* + a_2 f_{m-1}^* + \cdots + a_m + R_1 (=R). \tag{9}$$

上面的第二步三角化和第三步逐步除法都可以通过在计算机上完成.从输出的结果(9)式看到,如果最后所得的余式 R 恒为 0,那么在题设 $f_1=0, f_2=0, \cdots, f_m=0$,以及非退化条件 $c_1\neq 0, c_2\neq 0, \cdots, c_m\neq 0$ 下,结论 $g=0$ 一定成立、命题得证.反之,如果得出的余式 $R\neq 0$,那么命题不成立.

上述 $c_i\neq 0, i=1,2,\cdots,m$ 称为非退化条件.非退化条件的提出是吴文俊院士对几何定理证明的又一贡献.他指出初等几何定理的综合证法,不但不严密,而且也不可能严密,问题主要就是出现退化情形没有讨论.

在欧氏几何定理的论证过程中,通常排除退化情形.比如说三角形就要求三个顶点不在一直线上,三顶点共线就是退化情形.有些几何定理对退化情形也成立,但有些几何定理在退化情形就不成立.例如“在$\triangle ABC$中,若$\angle B=\angle C$,则$AB=AC$”.这条定理当$\angle B=\angle C=0$时就不成立.如图 10-2(a),当$\angle B=\angle C=0°$时,$AB\neq AC$.但在另一种退化情形,如图 10-2(b)又成立,可见

对退化情形有必要单独地进行讨论.

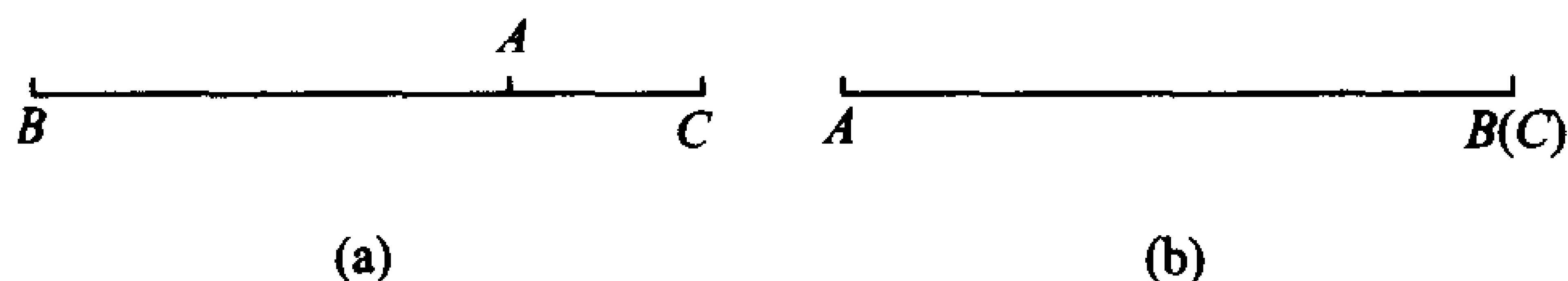


图 10-2

那么,在几何定理的假设中,排除了退化情形是不是万事大吉,证明就完全严密了呢?问题没有那么简单,因为用综合证法证明几何定理时,往往要作辅助线,辅助圆,对辅助图形运用一些已知的定理,在辅助图形中就可能遇到退化情形,怎样作辅助线事先不知道,因而无法预先说明会出现哪些退化情形,而使证明失效.证明中推理环节越多,出现退化情形而破坏证明的严密性的可能性越大.

这个问题在吴法中得到了圆满的解决.在吴法的证明过程中能够自动一一列出非退化情形的代数表示,指出保证几何命题成立的非退化条件,至于退化情形命题是否成立则要单独讨论.这种讨论通常比较容易进行,特别对于计算机来讲更是这样.这就是说,吴法不但实现几何定理在计算机上的证明,而且达到推理的真正的严密性.

下面我们用吴法来证明三个例子.

例 1　求证:三角形的三条高线共点.

解　如图 10-3,以△ABC 的 AB 边所在直线为 x 轴,过 C 点的高线为纵轴,过 A 的高线与过 C 的高线交于 H,且设各点坐标为 $A(u_1,0)$,$B(u_2,0)$,$C(0,u_3)$,$H(0,x_1)$,其中 A,B,C 三点可以任意选取为自由点,所以 u_1,u_2,u_3 为自由变元,而 H 点是受假设条件限制的约束点,故 x_1 是约束变元.

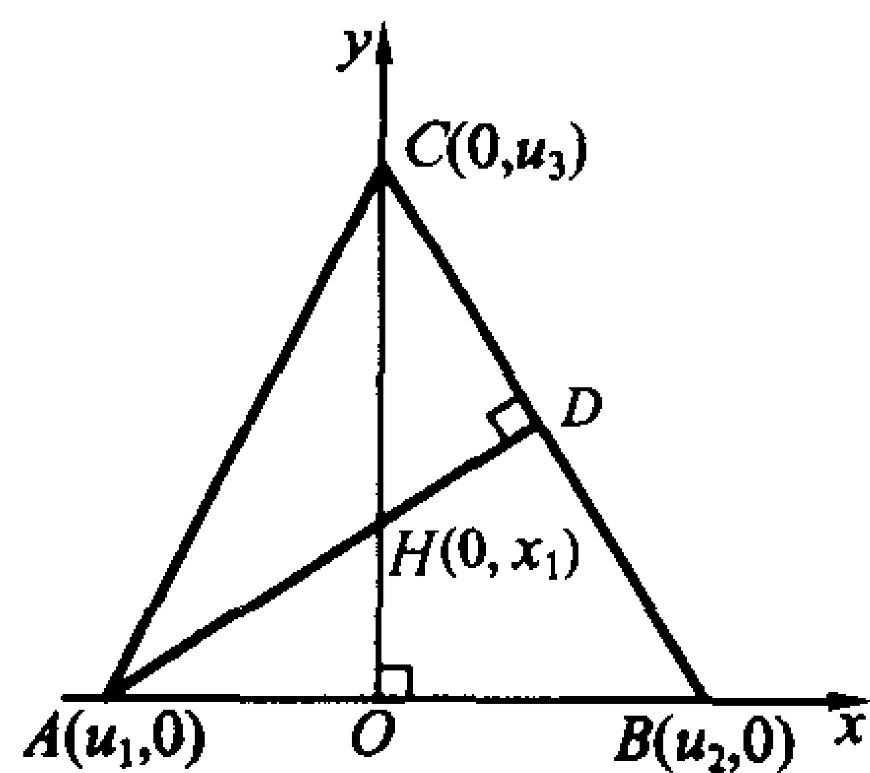


图 10-3

只要能证明 $BH\perp AC$,命题即可得证.

由假设 $AH\perp BC$,根据垂直公式得

$$f_1=(x_1-0)(u_3-0)+(0-u_1)(0-u_2)=0.$$

而结论 $BH\perp AC$,即

$$g=(x_1-0)(u_3-0)+(0-u_2)(0-u_1)=0.$$

可见 f_1 和 g 完全相同,因此,g 除以 f_1 所得余式 R 当然为 0,命题得证.

例 2　直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半.

解　如图 10-4,首先选好坐标系,以直角三角形的两直角边 AO 和 BO 分别为 x 轴与 y 轴,直角顶点为原点 O,取 D 为斜边 AB 的中点,并设它们坐标为

$O(0,0)$，$A(2u_1,0)$，$B(0,2u_2)$（这里设 $2u_1$，$2u_2$ 是由中点条件所定，便于计算）以及 $D(x_1,x_2)$，其中 O、A、B 三点是任意取的自由点，故它们的坐标 u_1，u_2 是自由变元，而中点 D 受假设条件所限，故其坐标 x_1，x_2 为约束变元，下面用吴法来解此题.

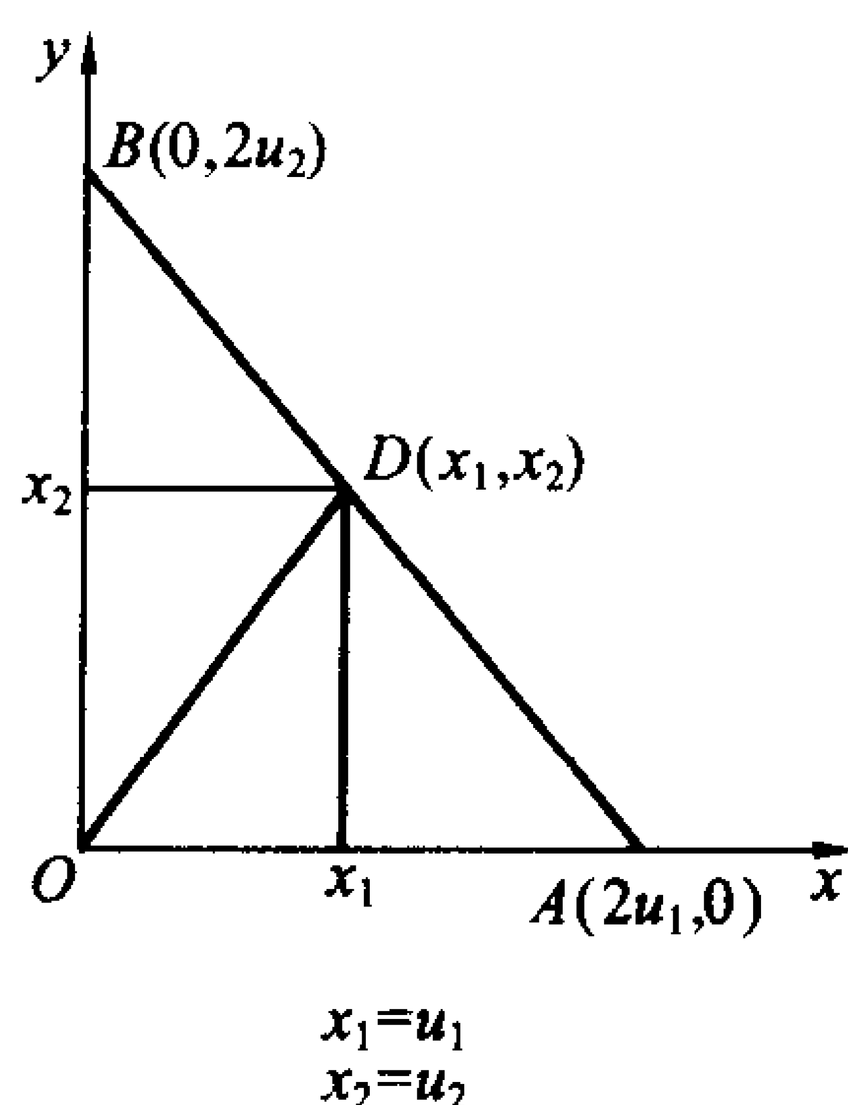


图 10 - 4

第一步 将几何问题代数化

假设部分，由于 D 是 AB 的中点，故由中点公式得

$$f_1=x_1-2u_1=0,$$
$$f_2=x_2-2u_2=0.$$

结论部分，要证明 $OD=BD$，由距离公式有

$$\begin{aligned}g&=(x_1^2+x_2^2)-(4u_1^2+4u_2^2)=x_1^2+x_2^2-4u_1^2-4u_2^2\\&=(x_1-2u_1)(x_1+2u_1)+(x_2-2u_2)(x_2+2u_2)=0.\end{aligned}$$

第二部分 三角化

由于 f_1 只含约束变元 x_1，而 f_2 只含约束变元 x_2，所以 f_1，f_2 本身就三角化了，因此可记为

$$f_1^*=f_1=x_1-2u_1=0,$$
$$f_2^*=f_2=x_2-2u_2=0.$$

第三步 作逐步除法

将 g 除以 f_2^* 即

$$\frac{g}{f_2^*}=(x_2+2u_2)+\frac{(x_1-2u_1)(x_1+2u_1)}{(x_2-2u_2)},$$

即

$$g=(x_2+2u_2)f_2^*+R_2, \tag{10}$$

其中 $R_2=(x_1-2u_1)(x_1+2u_1)$.

以 R_2 除以 f_1^*，类似得

$$R_2=(x_1+2u_1)f_1^*+R, \tag{11}$$

其中 $R=0$，若将(11)式代入(10)式得

$$g=(x_1+2u_1)f_1^*+(x_2+2u_2)f_2^*+R,$$

其中 $R=0$，命题得证．

例 3 在$\triangle ABC$ 中，D 是 AB 的中点，$DE/\!/BC$，求证：E 是 AC 的中点（中位线定理）.

解 如图 10 - 5，首先选取坐标系，以$\triangle ABC$ 的 AB 边为 y 轴，点 B 为原点，则可设 $A(0,2u_1)$，$B(0,0)$，$C(u_2,u_3)$，$D(0,u_1)$，$E(x_1,x_2)$，其中设 $A(0,2u_1)$为

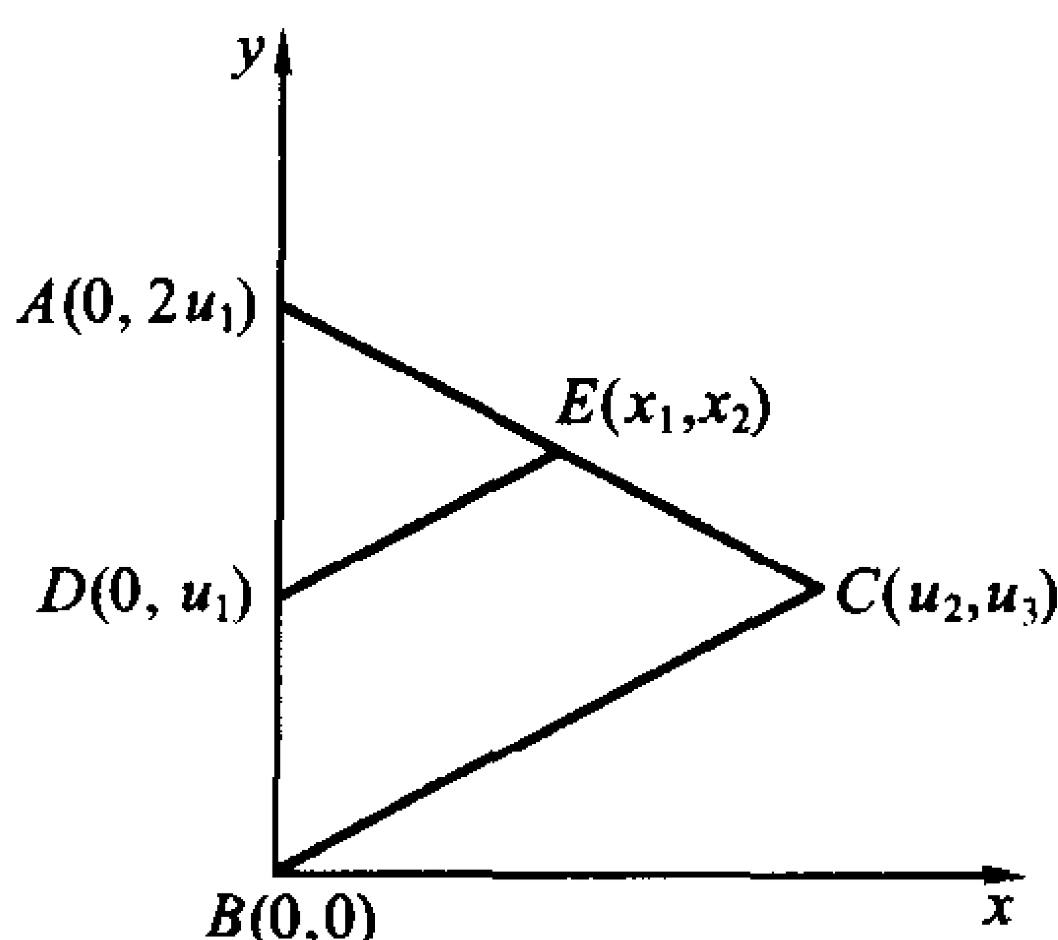


图 10-5

计算方便，故 u_1,u_2,u_3 为自由变元，x_1,x_2 为约束变元，下面用吴方法证明此题.

第一步　将几何问题代数化

假设部分：由 $DE/\!/BC$，根据平行公式有

$$f_1=(x_2-u_1)(u_2-0)-(x_1-0)(u_3-0)$$
$$=u_2x_2-u_3x_1-u_1u_2=0.$$

再由 A、E、C 三点共线，由解析几何共线公式（即平行公式）有

$$f_2=(x_2-2u_1)(u_2-0)-(x_1-0)(u_3-2u_1)$$
$$=u_2x_2-u_3x_1+2u_1x_1-2u_1u_2=0.$$

结论部分：要证明 $AE=DC$，由距离公式有

$$g=x_1^2+(x_2-2u_1)^2-(u_2-x_1)^2-(u_3-x_2)^2$$
$$=-4u_1x_2+2u_3x_2+2u_2x_1+4u_1^2-u_2^2-u_3^2.$$

第二步　三角化

令

$$f_1^*=f_2-f_1=2u_1x_1-u_1u_2=0,$$
$$f_2^*=f_2=u_2x_2+(2u_1-u_3)x_1-2u_1u_2.$$

第三步　作逐步除法

将 g 除以 f_2^*，并将 g 和 f_2^* 都看作约束变元 x_2 的多项式，为了避免商式中出现分式，实际上是将 u_2g 除以 f_2^* 得

$$u_2g=2(u_3-2u_1)f_2^*-R_2, \tag{12}$$

其中

$$R_2=2(u_2^2+u_3^2-4u_1u_3+4u_1^2)x_1-(4u_1^2u_2-u_2^2-u_2u_3^2-4u_1u_2u_3).$$

再将 R_2 除以 f_1^*，把它们都看做 x_1 的多项式，为了避免商式中出现分式，实际上是将 u_1R_2 除以 f_1^*，即

$$u_1R_2=(u_1^2+u_3^2-4u_1u_3+4u_1^2)f_1^*+R, \tag{13}$$

其中 $R\equiv0$.

将(11)$\times u_1$，再将(12)代入得

$$u_1u_2g=2u_1(u_3-2u_1)f_2^*+(u_1^2+u_3^2-4u_1u_3+4u_1^2)f_1^*+R.$$

当 $u_1\neq0,u_2\neq0$ 时，由 $f_2^*=0,f_1^*=0,R\equiv0$ 和得 $g=0$ 命题得证；

当 $u_1=0$ 时，点 A 与点 B 重合，ABC 不成为三角形；

当 $u_2=0$ 时，则点 C 在 AB 上，命题也无意义. 因此此命题在 $u_1\neq0,u_2\neq0$ 的条件下才能成立.

这里要说明一下，如果方程(1)是线性方程组可以用通常的高斯消元法化为三角化，但是如果方程组(1)是非线性方程组就得用吴文俊特征列法进行三角化.

至于计算机上的具体证明，请使用高小山，张景中，周咸青研究的《几何专家》(PC 软件)，这一软件已由北京中国少年儿童出版社 1998 年出版.

第三节 张景中消点算法

首先介绍共边定理与共角定理，我们从以下基本命题出发.

基本命题：等高三角形底边之比等于面积之比. 设在$\triangle ABP$ 的 AB 边上有一点 Q，如果 $AQ=\lambda AB$，则 $S_{AQP}=\lambda S_{ABP}\left(\text{或}\frac{S_{BQP}}{S_{ABP}}=\frac{BQ}{AB}\text{或}\frac{S_{AQP}}{S_{BQP}}=\frac{AQ}{BQ}\right)$.

我们用 S_{ABC} 表示$\triangle ABC$ 的面积. 这一基本命题就是二千多年前欧几里得《几何原本》第 6 卷命题 1.

在图 10－6 中，让 Q 点离开 AB 边沿 PQ 线延伸出去就变成图 10－7(b)，这时两个等高三角形就变成了有一条公共边的两个共边三角形. 在图 10－7(b)就有 6 对共边三角形. 可见共边三角形是处处存在，它比全等三角形，相似三角形要广泛得多.

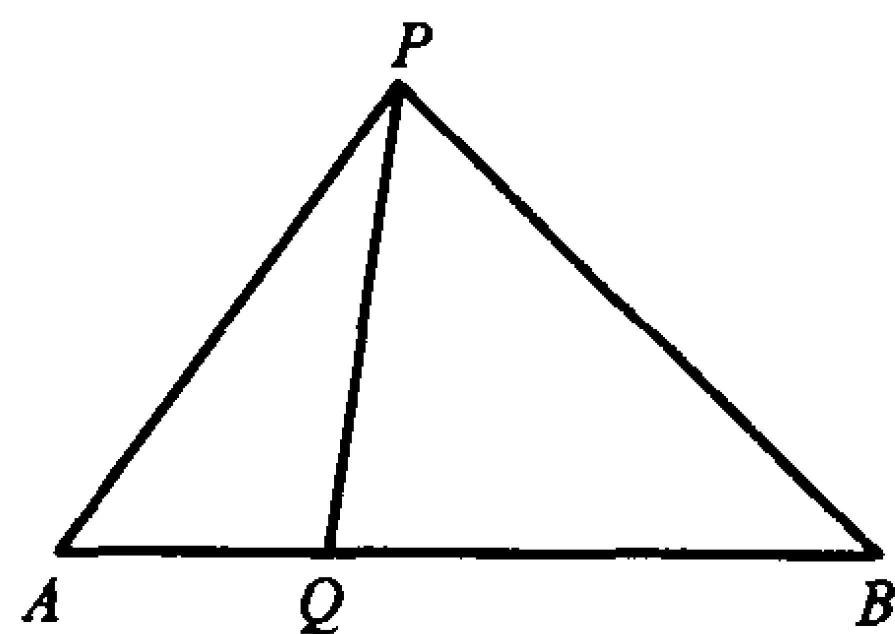


图 10－6

共边定理 若直线 PQ 和直线 AB 交于 M，则 $\frac{S_{PAB}}{S_{QAB}}=\frac{PM}{QM}$.

证明 共边三角形一般有图 10－7 所画的四种情形.

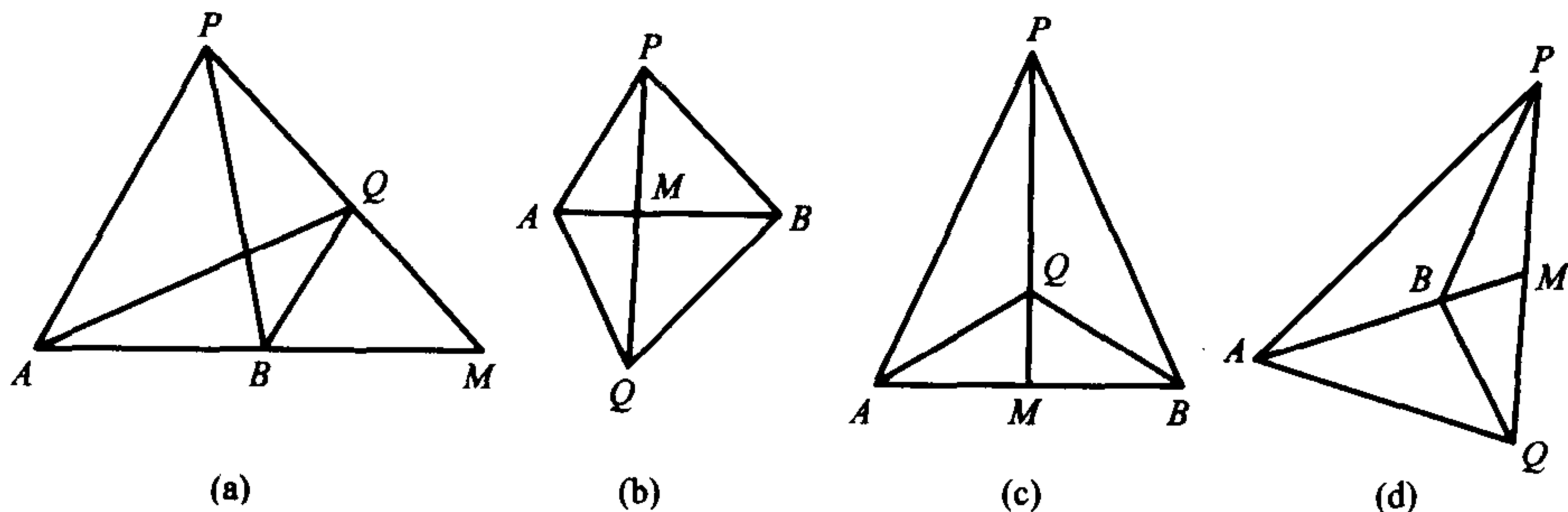


图 10－7

利用基本命题证明

$$\frac{S_{PAB}}{S_{QAB}}=\frac{S_{PAB}}{S_{PAM}}\cdot\frac{S_{PAM}}{S_{QAM}}\cdot\frac{S_{QAM}}{S_{QAB}}=\frac{AB}{AM}\cdot\frac{PM}{QM}\cdot\frac{AM}{AB}=\frac{PM}{QM}.$$

可见基本命题是共边定理的特殊情况.

从基本命题到共边定理只是一步之差，可这却经历了二千多年，直到 20 世纪 70 年代才被张景中院士所发现并命名为共边定理. 由于共边定理处处存在，它在解平面几何定理方面如同一把利剑，使许多几何问题迎刃而解.

例 1　求证：平行四边形对角线相互平分.

证明　如图 10－8，只要能证明 $AE=CE$，$BE=DE$ 即可.

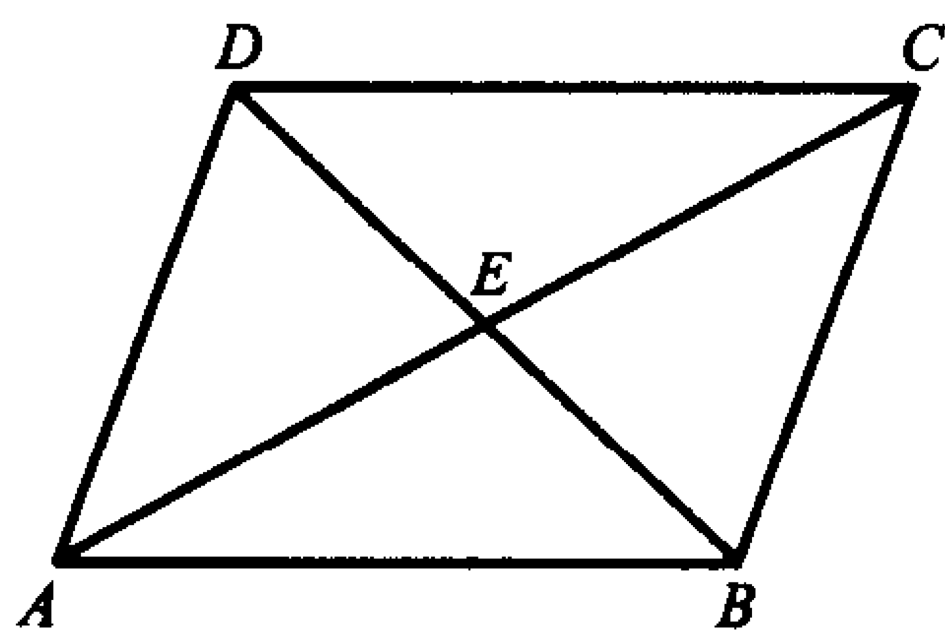


图 10－8

$$\frac{AE}{CE}=\frac{S_{ABD}}{S_{CBD}}\text{（共边定理）}$$

$$=\frac{S_{ABC}}{S_{ABC}}\quad\text{（因为 }DA/\!/BC,DC/\!/AB\text{）}$$

$$=1$$

故 $AE=CE$，同理可证 $BE=DE$.

例 2　在$\triangle ABC$内任取一点，直线 AP、BP、CP 分别与 BC、CA、AB 交于 X，Y，Z（如图 10－9）. 求证：$\frac{PX}{AX}+\frac{PY}{BY}+\frac{PZ}{CZ}=1$.

证明　由共边定理得

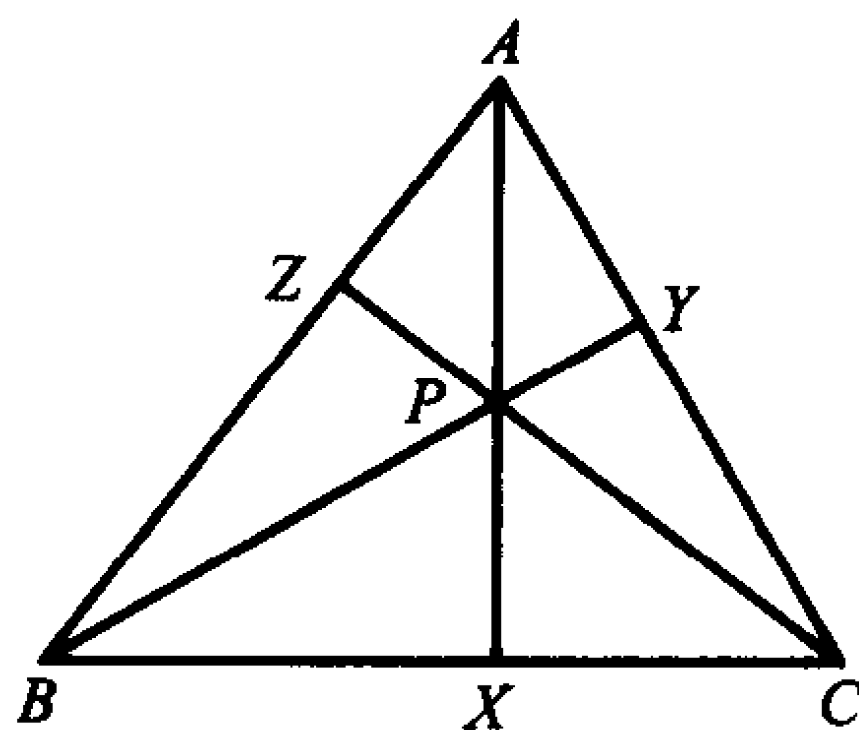


图 10－9

$$\frac{PX}{AX}=\frac{S_{PBC}}{S_{ABC}},$$

$$\frac{PY}{BY}=\frac{S_{PAC}}{S_{ABC}},$$

$$\frac{PZ}{CZ}=\frac{S_{PAB}}{S_{ABC}}.$$

三式相加得

$$\frac{PX}{AX}+\frac{PY}{BY}+\frac{PZ}{CZ}=\frac{S_{PBC}+S_{PAC}+S_{PAB}}{S_{ABC}}=\frac{S_{ABC}}{S_{ABC}}=1.$$

例 3　凸四边形 $ABCD$ 中，M、N 分别是 AB、CD 的中点，直线 MN 分别是与直线 BC、AD 交于 P、Q，如图 10－10. 求证：$\frac{AQ}{DQ}=\frac{BP}{CP}$.

证法 1　$\frac{AQ}{DQ}=\frac{S_{AMN}}{S_{DMN}}$　（共边定理）

$$=\frac{S_{BMN}}{S_{CMN}}$$ （由于 M 与 N 为中心）

$$=\frac{BP}{CP}$$ （共边定理）.

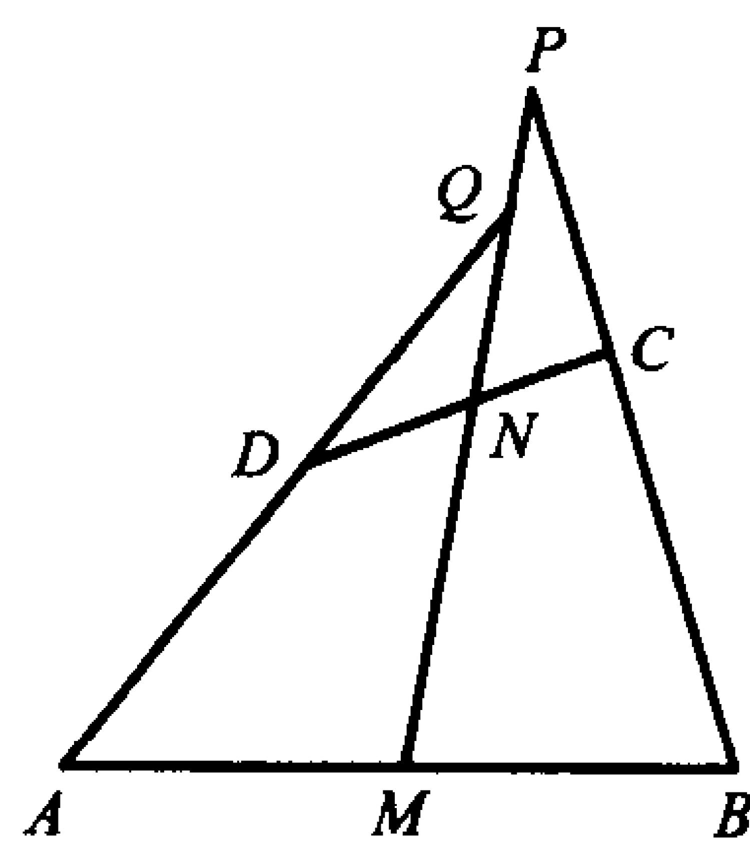


图 10－10

证法 2 作辅助线 BQ、CQ，则

$$\frac{AQ}{DQ}=\frac{S_{AMQ}}{S_{DMQ}}$$ （共边定理）

$$=\frac{S_{BMQ}}{S_{CMQ}}$$ （由于 M、N 是中点）

$$=\frac{BP}{CD}$$ （共边定理）.

证法 3 作辅助线 PD、PA，则

$$\frac{AQ}{DQ}=\frac{S_{AMP}}{S_{DMP}}$$ （共边定理）

$$=\frac{S_{BMP}}{S_{CMP}}$$ （由于 M，N 分别是 AB、CD 中点）

$$=\frac{BP}{CD}$$ （共边定理）.

既然有共边三角形和共边定理，那必然会想到应该相应地有共角三角形和共角定理，下面介绍解平面几何问题的另一把利剑——共角定理.

共角定理 若 $\angle ABC$ 与 $\angle A'B'C'$ 相等或互补，则 $\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}}=\frac{AB\cdot BC}{A'B'\cdot B'C'}$.

证明 如图 10－11，把 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 拼在一起，使 $\angle B$ 与 $\angle B'$ 重合或互为邻补角得

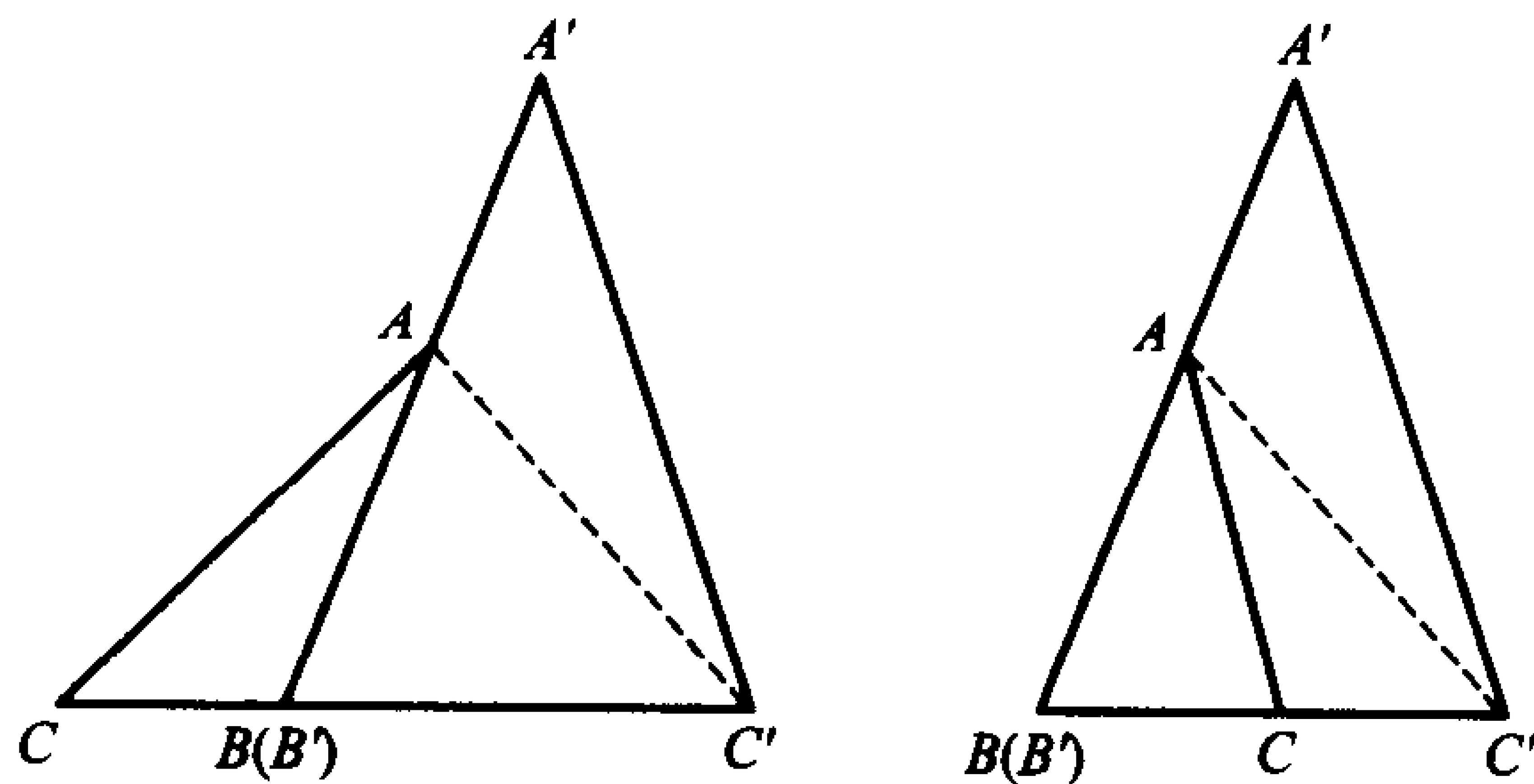


图 10－11

$$\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}}=\frac{S_{ABC}}{S_{ABC'}}\cdot\frac{S_{ABC'}}{S_{A'B'C'}}=\frac{BC\cdot AB}{B'C'\cdot A'B'}.$$ （基本命题）

例 4 在$\triangle ABC$中，$\angle B=\angle C$. 求证：$AB=AC$.

证明 把$\triangle ABC$看作两个共角（$\angle ABC=\angle ACB$）三角形，由共角定理得

$$\frac{S_{ABC}}{S_{ACB}}=\frac{AB}{AC}\cdot\frac{BC}{BC}=\frac{AB}{AC}.$$

由于$\triangle ABC$与$\triangle ACB$的面积相等，故得$AB=AC$.

例 5 设AM是$\triangle ABC$在BC边上的中线，任作一条直线分别交AB、AC、AM于P、Q、N，如图 10-12. 求证：$\frac{AB}{AP}, \frac{AM}{AN}, \frac{AC}{AQ}$为等差级数.

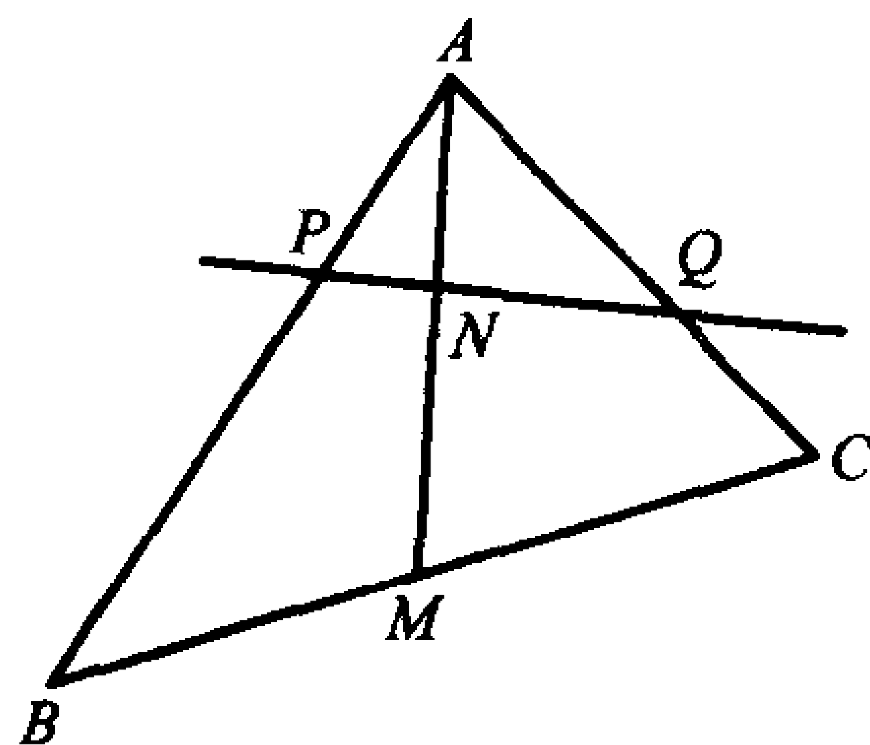


图 10-12

证明 由于M为BC的中点，故

$$S_{ABM}=S_{ACM}=\frac{1}{2}S_{ABC}, (1)$$

$$\frac{S_{PAN}}{S_{BAM}}=\frac{AP\cdot AN}{AB\cdot AM}, \text{（共角定理）}$$

$$\frac{S_{NAQ}}{S_{MAC}}=\frac{AQ\cdot AN}{AC\cdot AM}. \text{（共角定理）}$$

将上面两式相加，并注意到(1)式得

$$\frac{AN}{AM}\left(\frac{AP}{AB}+\frac{AQ}{AC}\right)=\frac{S_{PAN}+S_{NAQ}}{\frac{1}{2}S_{ABC}}=\frac{2S_{APQ}}{S_{ABC}}=2\cdot\frac{AP\cdot AQ}{AB\cdot AC}. \text{（共角定理）}$$

解出上式得$\frac{AM}{AN}=\frac{1}{2}\left(\frac{AC}{AQ}+\frac{AB}{AP}\right)$,

即证明$\frac{AB}{AP}, \frac{AM}{AN}, \frac{AC}{AQ}$为等差级数.

我们还可得到（证明略）

推广的共角定理 若四边形$ABCD$与$A'B'C'D'$的对角线夹角相等或互补，则

$$\frac{S_{ABCD}}{S_{A'B'C'D'}}=\frac{AC\cdot BD}{A'C'\cdot B'D'}.$$

例 6 设线段PQ在直线AB的一侧，R是PQ上任一点，$PR=\lambda PQ$. 求证：$S_{RAB}=(1-\lambda)S_{PAB}+\lambda S_{QAB}$.

（上述公式叫做定比分点公式）

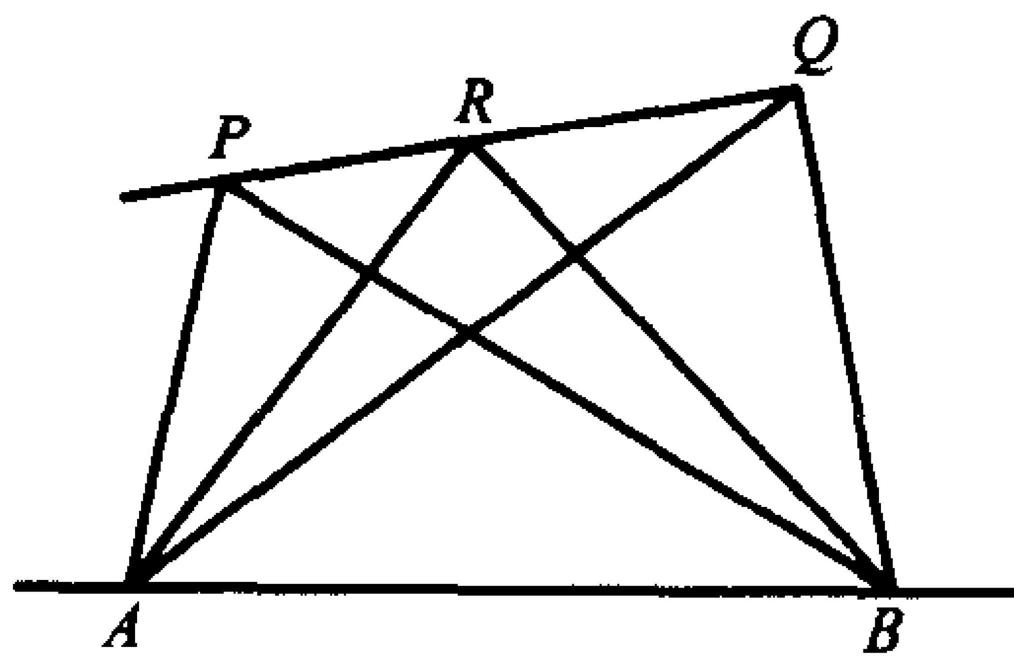


图 10-13

证明 如图 10-13，当$PQ /\!/ AB$时，$S_{RAB}=S_{PAB}=S_{QAB}$，所要证时的公式显然成立，当PQ与AB不平行时，考虑两个星形四边形面积比，由推广的共角定理，可得$\frac{S_{QAB}-S_{RAB}}{S_{RAB}-S_{PAB}}=\frac{S_{AQBR}}{S_{ARBP}}=$

$\frac{AB \cdot RQ}{AB \cdot PR}=\frac{1-\lambda}{\lambda}$,

所以 $\lambda(S_{QAB}-S_{RAB})=(1-\lambda)(S_{RAB}-S_{PAB})$,

整理后即得所要的等式.

使用有向线段与带号面积,共边定理与定比分点公式可以推广到更准确的形式.

共边定理(一般形式)若直线 PQ 与 AB 交于 M,则

$$\frac{\overline{S}_{PAB}}{\overline{S}_{QAB}}=\frac{\overline{PM}}{\overline{QM}},且\frac{\overline{PM}}{\overline{PQ}}=\frac{\overline{S}_{PAB}}{\overline{S}_{PAQB}}.$$

定比分点公式(一般形式)若 P、Q、R 三点共线,$\lambda\,\overline{PQ}=\overline{PR}$,则

$$\overline{S}_{RAB}=\lambda\,\overline{S}_{QAB}+(1-\lambda)\overline{S}_{PAB}.$$

消点算法是在古老的面积方法的基础上,由张景中院士所创立的一种行之有效的方法.例如我们要证明两线段 $AB=CD$,先将它换成比值$\frac{AB}{CD}=1$ 形式,然后用共边定理或其他定理,将线段的比化为面积之比,而面积比是一种数值比,通过消去所有点,最后左边比值如果能得到是数值 1,这个几何问题也就证明了.下面我们举三个例子来说明消点算法的思想.

例 7 已知$\triangle ABC$,直线 XY 与直线 AC 交于 E,与直线 BC 交于 D,与直线 AD 交于 F,如图 10-14.

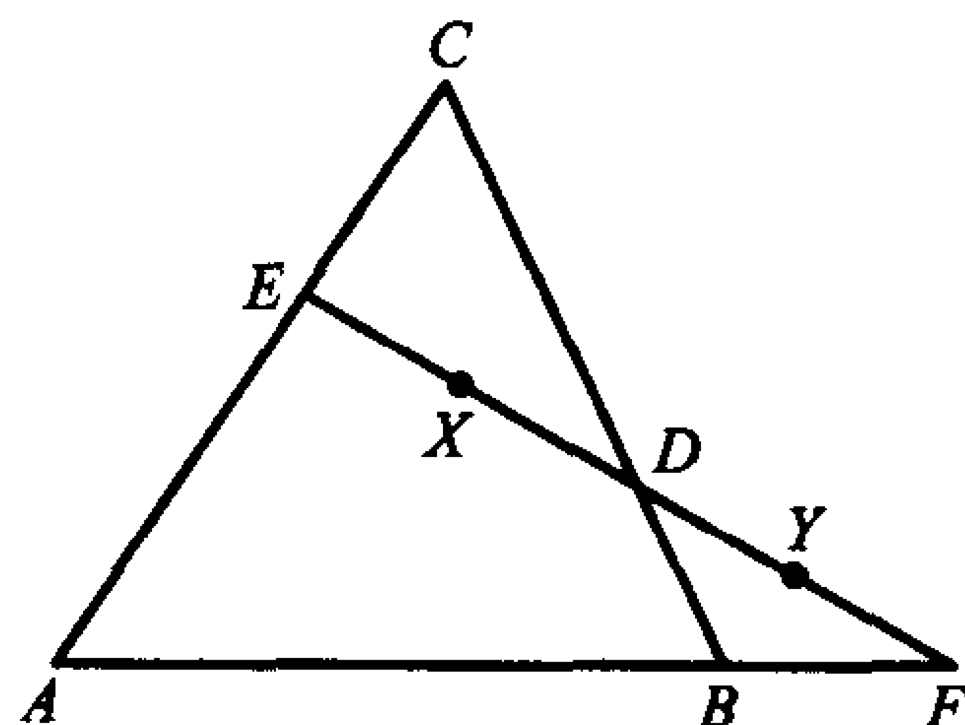


图 10-14

作图 1. 任取平面上不共线三点 A、B、C.

2. 任取不重合的两点 X,Y.

3. 直线 XY 与 AC 交于 E,与 BC 交于 D,与直线 AB 交于 F.

A、B、C、D、X、Y 是任取的点称为自由点,而 D、E、F 是受假设条件所限制称为约束点.

消点算法主要是设法消去约束点,利用假设条件和面积方法(也可用其他方法)将点一一消去,而消点的顺序是从最后作出的约束点先消去,然后从后向前逐一消去,最后将左端的点(字母)全部消去,所得的数值如果等于右端的数值,命题得证.在本题中若将左端的点全部消去后所得的数字若等于数值 1,命题得证.

证明 最后作的点是 F,而包含 F 的几何量是$\frac{AF}{BF}$,由共边定理有

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{BF}}=\frac{\overline{S}_{AXY}}{\overline{S}_{BXY}}.$$

这样就消去了点 F. 同样可得

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{AE}}=\frac{\overline{S}_{CXY}}{\overline{S}_{AXY}}\text{和}\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}}=\frac{\overline{S}_{BXY}}{\overline{S}_{CXY}}=1.$$

命题得证.

把这些等式代入要证的结论的左端，消去 F、E、D，得到

$$\frac{\overline{CE}}{\overline{AE}}\cdot\frac{\overline{BD}}{\overline{CD}}\cdot\frac{\overline{AF}}{\overline{BF}}=\frac{\overline{S}_{CXY}}{\overline{S}_{AXY}}\cdot\frac{\overline{S}_{BXY}}{\overline{S}_{CXY}}\cdot\frac{\overline{S}_{AXY}}{\overline{S}_{BXY}}=1$$

命题得证.

例 8　已知 M、N 分别是平行四边形 $ABCD$ 的两边 AB、CD 的中点，CM 与 BD 交于 E，AN 与 BD 交于 F，如图 10－15. 求证：$BE=EF=FD$.

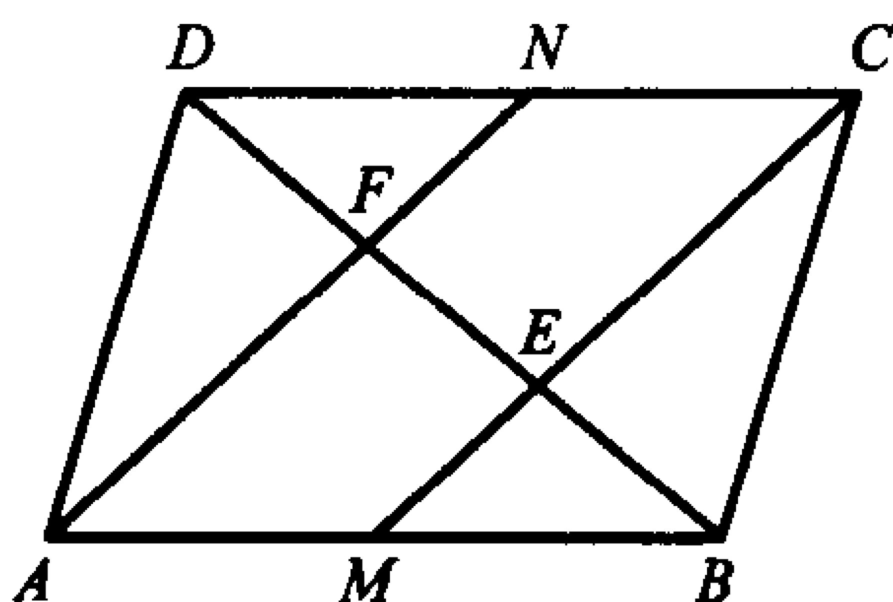


图 10－15

作图　1. 作平行四边形 $ABCD$.

2. 取 AB、CD 的中点分别为 M、N.

3. 连 BD、CM、AN，CM 与 BD 交于 E，AN 与 BD 交于 F.

证明　E、F 是最后作出，首先消去 E 点，由于

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{DE}}=\frac{\overline{S}_{BMC}}{\overline{S}_{DCM}}\quad\text{（共边定理）}$$

$$=\frac{\frac{1}{4}\overline{S}_{ABCD}}{\frac{1}{2}\overline{S}_{ABCD}}=2.$$

利用合分比定律得　$BE=\frac{1}{3}BD$.

用同样方法可证明：$\frac{BF}{DF}=2$ 和 $DF=\frac{1}{3}BD$.

最后得　$BE=EF=DF$. 命题得证.

例 9　已知$\triangle ABC$ 的高 BD、CE 交于 H，求证：$\frac{AC}{AB}=\frac{\cos\angle BAH}{\cos\angle CAH}$，如图10－16.

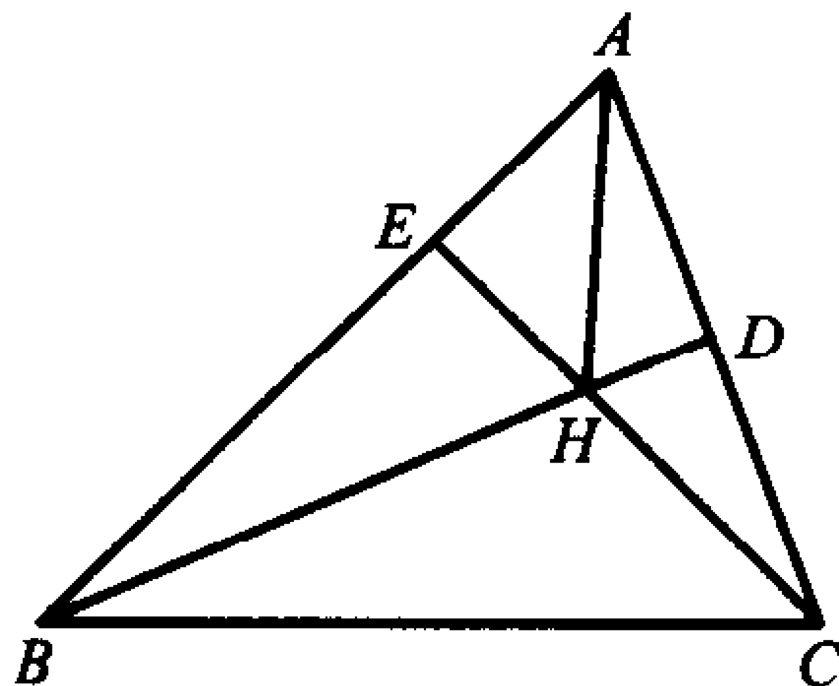


图 10－16

首先将结论改写成$\frac{AC\cdot\cos\angle CAH}{AB\cdot\cos\angle BAH}$.

作图　1. 任取三点 A、B、C.

2. 作 AC 上的高 BD，AB 上的高 CE.

3. BD 与 CE 交于 H，连结 AH.

证明　$\frac{AC\cdot\cos\angle CAH}{AB\cdot\cos\angle BAH}=\frac{AC\cdot AD\cdot AH}{AB\cdot AE\cdot AH}\left(\text{因为}\cos\angle BAH=\frac{AE}{AH},\cos\angle CAH=\frac{AD}{AH}\right)$

$$=\frac{AC\cdot AD}{AB\cdot AE}.$$

为了消去 D、E，利用等式 $AD=AB\cdot\cos\angle BAC$ 及 $AE=AC\cdot\cos\angle BAC$ 代入上式，就证明了所要结论.

从例 3 可以看去消点算法也可以不用面积方法.

用共边定理和定比分点分式可建立消去共线线段上的点的四个消点方法，还可以建立消去平行线上的点，垂线上的点，圆上的点等另外 16 种算法的思想，基本上可以求解平面几何的问题. 当然具体的求解过程中还是要灵活，不能硬套消点方法，具体请看张景中著的《平面几何新路——解题研究》一书.

吴文俊数学机械化方法的出现，开辟了数学定理机械化证明的一个新的研究领域，但是要通晓吴法却不是一件容易的事，它的数学理论较为艰深，而且它的程序比较复杂，有时解决一个问题要解几十个甚至几百个方程组，而且与通常几何证明形式不一致，这种机器证明计算机明白，人不容易明白. 所谓可读证明就是将几何命题的内容，按简单的计算机语言输入，计算机能自动生成显示出与人用手算的步骤相一致的算式，并能将几何图形动态地作出来. 在计算机上如何实现证明过程，请使用高小山，张景中，周咸青开发的《几何专家》(PC 软件)，这一软件已由北京中国少年儿童出版社 1998 年出版.